"Пифагоровы тройки" высших степеней

Владимир Браун

22.07.2022

Пифагоровы тройки – это тройки натуральных чисел *a*, *b*, *c*, таких, что $a^2 + b^2 = c^2$. Тройка называется примитивной если числа *a*, *b* и *c* взаимно просты, то есть, не имеют общих делителей отличных от 1. Все другие тройки получаются из примитивных троек умножением на какой-либо натуральный множитель. Поэтому, говоря о пифагоровых тройках, обычно имеют в виду примитивные тройки.

В 1934 году шведский математик Берггрен открыл троичное дерево (граф), корнем которого служит тройка (3, 4, 5), содержащее все примитивные пифагоровы тройки:

- (3 4 5)
  - 5 12 13
    - 7 24 25
      - 9 40 41
      - 105 88 137
      - 91 60 109
    - 55 48 73
      - 105 208 233
      - 297 304 425
      - 187 84 205
    - 45 28 53
      - 95 168 193
      - 207 224 305
      - 117 44 125
  - 21 20 29
    - 39 80 83
      - 57 176 185
      - 377 336 505
      - 299 180 349
    - 119 120 169
      - 217 456 505
      - 697 696 985
      - 459 220 509
    - 77 36 85
      - 175 288 337
      - 319 360 481
      - 165 52 173
  - 15 8 17
    - 33 56 65
      - 51 140 149
      - 275 252 373
      - 209 120 241
    - 65 72 97
      - 115 252 277
      - 403 396 565
      - 273 136 305
    - 35 12 37
      - 85 132 157
      - 133 156 205
      - 63 16 65

…

В 1963 году другой математик, датчанин Барнинг, показал, что указанное дерево примитивных пифагоровых троек может быть получено умножением трех матриц:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

на вектор-столбец примитивной тройки, получая для каждой тройки, начиная с корневой тройки (3, 4, 5), три её "потомка":

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 20 \\ 29 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 17 \end{bmatrix}, \ldots$$

Существование такого троичного дерева примитивных пифагоровых троек являет собой интересный феномен. Все пифагоровы тройки оказываются потомками одной-единственной, корневой пифагоровой тройки (3, 4, 5). Не будь её – не было бы и никаких других пифагоровых троек.

Здесь, вероятно, каждому на ум приходит теорема Ферма, утверждающая, что троек натуральных чисел a, b, c, для которых верно равенство $a^n + b^n = c^n$, где n больше двух, не существует. Причину этого можно видеть как раз в том, что для степеней выше двух соответствующей корневой тройки "нет на месте".

А что же есть? Давайте посмотрим.
Посмотрим сначала, что такого особенного в "квадратной" корневой тройке (3, 4, 5). Кроме главного свойства: "сумма квадратов равна квадрату",

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$

другим очевидным ей свойством является то, что числа 3, 4, 5 – это последовательные натуральные числа. Других таких пифагоровых троек нет.

Обратимся теперь к рядам последовательных кубов, биквадратов, и других степеней. И здесь мы делаем интересное открытие. Оказывается, последовательные числа 5, 6, 7 образуют почти точную "кубическую пифагорову тройку":

$$\sqrt[3]{5^3 + 6^3} = 6{,}986.$$

Аналогичные приближённые равенства верны и для других степеней:

$$\sqrt[4]{7^4 + 8^4} = 8{,}978,$$

$$\sqrt[5]{9^5 + 10^5} = 10{,}973,$$

$$\sqrt[6]{11^6 + 12^6} = 12{,}967,$$

$$\cdots$$

$$\sqrt[100]{199^{100} + 200^{100}} = 200{,}949,$$

$$\cdots$$

$$\sqrt[n]{(2n-1)^n + (2n)^n} \approx 2n + 1.$$

Разность $(2n+1)-\sqrt[n]{(2n-1)^n+(2n)^n}$ хотя и растёт с ростом *n*, но с таким замедлением, что никогда не превышает значения 0,052:

$$\lim_{n\to\infty}\left((2n+1)-\sqrt[n]{(2n-1)^n+(2n)^n}\right)=2-2\ln\left(e^{\frac{1}{2}}+1\right)=0{,}0518460316\,.$$

Дело оказывается не в том, что корневых троек нет вообще, а в том, что они неточны. Но если корневые тройки высших степеней, хотя и неточные, есть, то, может быть, они тоже образуют троичные деревья?

Приглядимся к "размножающим" матрицам:

$$M_1=\begin{bmatrix}1&-2&2\\2&-1&2\\2&-2&3\end{bmatrix},\quad M_2=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&3\end{bmatrix},\quad M_3=\begin{bmatrix}-1&2&2\\-2&1&2\\-2&2&3\end{bmatrix}.$$

Бросается в глаза, что в них много 2-ек. Не связаны ли они со степенью 2?
Если это так, то для 3-ей степени, размножающие матрицы должны быть следующими (здесь у M два индекса, верхний и нижний):

$$M_1^3=\begin{bmatrix}2&-3&3\\3&-2&3\\3&-3&4\end{bmatrix},\quad M_2^3=\begin{bmatrix}2&3&3\\3&2&3\\3&3&4\end{bmatrix},\quad M_3^3=\begin{bmatrix}-2&3&3\\-3&2&3\\-3&3&4\end{bmatrix}.$$

Проверим это предположение:

$$\begin{bmatrix}2&-3&3\\3&-2&3\\3&-3&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5\\6\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\24\\25\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2&3&3\\3&2&3\\3&3&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5\\6\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}49\\48\\61\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-2&3&3\\-3&2&3\\-3&3&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5\\6\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29\\18\\31\end{bmatrix}.$$

$$\sqrt[3]{13^3+24^3}=25{,}209\approx 25\,,\quad \sqrt[3]{49^3+48^3}=61{,}113\approx 61\,,\quad \sqrt[3]{29^3+18^3}=31{,}148\approx 31\,.$$

Как ни удивительно, но это действительно работает.
Для 4-той степени, размножающие матрицы будут тогда такими:

$$M_1^4=\begin{bmatrix}3&-4&4\\4&-3&4\\4&-4&5\end{bmatrix},\quad M_2^4=\begin{bmatrix}3&4&4\\4&3&4\\4&4&5\end{bmatrix},\quad M_3^4=\begin{bmatrix}-3&4&4\\-4&3&4\\-4&4&5\end{bmatrix}.$$

И так далее.

В общем, мы можем сделать следующее обобщение на произвольную натуральную степень. Для любого натурального показателя степени *n*, корневая "пифагорова тройка" (в кавычках или без) равна $(2n-1,\,2n,\,2n+1)$, а размножающие матрицы равны:

$$M_1^n=\begin{bmatrix}n-1&-n&n\\n&1-n&n\\n&-n&n+1\end{bmatrix},\quad M_2^n=\begin{bmatrix}n-1&n&n\\n&n-1&n\\n&n&n+1\end{bmatrix},\quad M_3^n=\begin{bmatrix}1-n&n&n\\-n&n-1&n\\-n&n&n+1\end{bmatrix}.$$

С их помощью, начиная с корневой тройки, для любой натуральной степени *n* можно построить соответствующее дерево "пифагоровых троек".

В частности, дерево кубических "пифагоровых троек" будет следующим:

$$\begin{pmatrix}5 & 6 & 7\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}13 & 24 & 25\\ 49 & 48 & 61\\ 29 & 18 & 31\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}29 & 66 & 67\\ 173 & 162 & 211\\ 121 & 84 & 133\end{matrix} \qquad \begin{matrix}137 & 234 & 247\\ 425 & 426 & 535\\ 229 & 132 & 241\end{matrix} \qquad \begin{matrix}97 & 144 & 157\\ 205 & 216 & 265\\ 89 & 42 & 91\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}61 & 156 & 157\\ 457 & 420 & 553\\ 341 & 246 & 379\end{matrix} \qquad \begin{matrix}493 & 828 & 877\\ 1465 & 1476 & 1849\\ 773 & 438 & 811\end{matrix} \qquad \begin{matrix}389 & 594 & 643\\ 893 & 930 & 1147\\ 409 & 204 & 421\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}313 & 684 & 697\\ 1717 & 1620 & 2101\\ 1169 & 798 & 1279\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1177 & 2028 & 2137\\ 3733 & 3732 & 4693\\ 2033 & 1182 & 2143\end{matrix} \qquad \begin{matrix}785 & 1146 & 1255\\ 1577 & 1674 & 2047\\ 661 & 300 & 673\end{matrix} \quad \cdots$$

$$\begin{matrix}233 & 474 & 487\\ 1097 & 1050 & 1351\\ 709 & 468 & 769\end{matrix} \qquad \begin{matrix}557 & 978 & 1027\\ 1853 & 1842 & 2323\\ 1033 & 612 & 1093\end{matrix} \qquad \begin{matrix}325 & 456 & 505\\ 577 & 624 & 757\\ 221 & 90 & 223\end{matrix}$$

В пользу сделанного обобщения имеется ещё один сильный аргумент.

Как показал H. Andres Lönnemo, "прародителем" всех пифагоровых троек является тривиальная тройка (1, 0, 1).

С помощью размножающих матриц можно получать не только потомков пифагоровых троек, но и определять их "предков". Действительно, если некоторая тройка получена умножением (слева) предка на какую-то из матриц, то определить этого предка можно разделив (опять слева) тройку на эту матрицу. Проблемой кажется то, что этих матриц три, и для произвольной тройки (взятой не с дерева), мы не знаем, с помощью какой из матриц данная тройка была получена. Удастся ли это определить?

Давайте просто посмотрим на примере, что получится. Возьмём первых потомков корневой пифагоровой тройки (3, 4, 5), т.е. тройки (5, 12, 13), (21, 20, 29), (15, 8, 17), и посмотрим, каким образом в каждом случае найдётся их общий предок.

В матричной арифметике деление производится умножением на обратную матрицу. Обратными для матриц M_1, M_2, M_3 будут матрицы:

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad M_3^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Умножим теперь (слева) каждую из троек на каждую из матриц:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 21 \\ 20 \\ 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 21 \\ 20 \\ 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 21 \\ 20 \\ 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Как видим, настоящего предка даёт только правильная матрица – обратная той, с помощью которой данная тройка была получена. Но и другие матрицы дают почти правильный результат – стоит отбросить знаки, и мы получим настоящего предка. То есть, для определения предка можно использовать любую из обратных матриц, следует лишь отбросить в результате возможные знаки минус.

Давайте определим теперь прародителя кубической корневой тройки:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Как видим, это та же тривиальная тройка (1, 0, 1), что и для квадратной корневой тройки. Тот же результат получим и для любой другой степени.

То есть, тривиальная тройка является прародителем, "LUCA", вообще всех пифагоровых троек, как настоящих, так и "пифагоровых троек" высших степеней. Поэтому, для построения троичного дерева "пифагоровых троек" (в кавычках или нет) нам не нужно знать корневую тройку. Для любой степени, можно начать с тривиальной тройки (1, 0, 1). Первым её потомком будет только одна новая тройка – корневая.

Примеры (для степеней 1, 2, 3, 4):

1. $$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. $$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. $$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -4 & 3 & 4 \\ -4 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

В заключение – простейшее троичное дерево "пифагоровых троек", для первой степени или попросту натуральных чисел:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \left\langle \begin{array}{ccc} 1 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 9 \\ 5 & 2 & 7 \end{array} \right\langle \begin{array}{l} \left\langle \begin{array}{ccc} 1 & 6 & 7 \\ 9 & 6 & 15 \\ 9 & 4 & 13 \end{array} \right. \\ \left\langle \begin{array}{ccc} 5 & 14 & 19 \\ 13 & 14 & 15 \\ 13 & 4 & 17 \end{array} \right. \cdots \\ \left\langle \begin{array}{ccc} 5 & 12 & 17 \\ 9 & 12 & 21 \\ 9 & 2 & 11 \end{array} \right. \end{array}$$

Эти тройки, сохраняя свойство "сумма степеней равна степени", в данном случае степени 1, потеряли свойство примитивности – тройки (9, 6, 15) и (9, 12, 21) сократимы.

Ссылка:

H. Andres Lönnemo. [The Trinary Tree(s) underlying Primitive Pythagorean Triples]