# Закономерности движения
# в центральном поле тяготения

Владимир Браун

01.06.2023

## I. Кинематика. Обобщение законов Кеплера

Основные закономерности движения тела в центральном поле тяготения известны как законы движения планет Кеплера. Законы Кеплера кинематические и получены эмпирическим путём, на основе астрономических наблюдений Тихо Браге. Здесь дан вывод кинематической теории движения в центральном поле тяготения, являющейся обобщением законов Кеплера.

### 1. Универсальное уравнение траектории

Используя две формы записи производной, по Ньютону и по Лейбницу, запишем в полярной системе координат ($r$, $\varphi$) тождества

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \quad \text{и} \quad \dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

Исключив из них время,

$$\mathrm{d}\varphi = \dot{\varphi}\,\mathrm{d}t, \;\; \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}r}{\dot{r}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\varphi = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}}\mathrm{d}r,$$

и проинтегрировав почленно последнее уравнение, получим интеграл

$$\varphi = \int \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}}\mathrm{d}r,$$

который и представляет собой универсальное уравнение траектории, одно из двух возможных, в полярной системе координат. Конечно, для тех случаев, когда угловая и радиальная скорости, $\dot{\varphi}$ и $\dot{r}$, представимы функциями от $r$ и интеграл может быть взят.

### 2. Выражение скорости через радиальную и угловую скорости

Так как векторы радиальной и трансверсальной составляющих скорости ортогональны, то квадрат скорости равен сумме квадратов этих составляющих:

$$v^2 = v_r^2 + v_\perp^2.$$

Поскольку радиальная составляющая скорости есть просто скорость изменения координаты $r$ (радиальная скорость), а трансверсальная составляющая скорости есть скорость изменения угловой координаты (угловая скорость) умноженная на радиус $r$,

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\perp = r\dot{\varphi},$$

то имеем следующее выражение скорости через радиальную и угловую скорости:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2.$$

## 3. Представление угловой скорости как функции расстояния

Закон сохранения момента импульса эквивалентен второму закону Кеплера, и означает, что момент скорости постоянен:

$$rv_{\perp} = r^2\dot{\varphi} = L .$$

Отсюда получаем искомое представление угловой скорости $\dot{\varphi}$ как функции от $r$:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{r^2} .$$

## 4. Уравнение скорости как функции расстояния

Заменив в выражении скорости через составляющие,

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 ,$$

угловую скорость $\dot{\varphi}$ её выражением через момент скорости и расстояние, получим уравнение не содержащее угловой координаты $\varphi$:

$$v^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} .$$

Центральное поле тяготения должно допускать устойчивые ограниченные траектории – планетарные орбиты. Движение планет происходит в ограниченной кольцевой области, между минимальным и максимальным расстоянием от центра тяготения. Минимальное и максимальное расстояние планетарных орбит Солнечной системы называются перигелием и афелием орбиты, и перицентром и апоцентром в общем случае произвольного центрального тела, обозначим их как $p$ и $a$.

При достижении границ указанной области радиальная составляющая скорости,

$$\dot{r} = \sqrt{v^2 - \frac{L^2}{r^2}} ,$$

становится равной нулю. Приравняв радиальную скорость к нулю, получим уравнение относительно $r$, корнями которого являются $a$ и $p$ – апоцентр и перицентр траектории:

$$v^2r^2 - L^2 = 0 .$$

Предположим, что функция $v^2r^2 - L^2$ является многочленом от $r$. Наличие у многочлена корней $a$ и $p$ означает, что он делится на $(a - r)$ и $(r - p)$, и имеет представление:

$$v^2r^2 - L^2 = w(a - r)(r - p),$$

где $w$ – некоторый многочлен. Из этого равенства получаем для скорости уравнение:

$$v^2 = \frac{w(a - r)(r - p)}{r^2} + \frac{L^2}{r^2} ,$$

или, после раскрытия скобок и объединения членов по степеням $r$:

$$v^2 = -w + \frac{w(a + p)}{r} + \frac{L^2 - wap}{r^2} .$$

Взяв значение квадрата скорости на бесконечно большом расстоянии от центра тяготения, предполагая, что значение $w$ в $r_\infty$ остаётся конечным, получим:

$$v_\infty^2 = -w\,.$$

То есть, многочлен $-w$ есть константа – квадрат остаточной скорости.

## 5. Представление радиальной скорости как функции расстояния

Имея уравнение скорости как функции расстояния, имеем вместе с тем и искомое представление радиальной скорости:

$$\dot r = \sqrt{v^2 - \frac{L^2}{r^2}} = \frac{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}{r}\,.$$

## 6. Уравнение траектории

Получив представления угловой и радиальной скорости как функций расстояния,

$$\dot\varphi = \frac{L}{r^2} \quad \text{и} \quad \dot r = \frac{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}{r}\,,$$

подставим их теперь в наше универсальное уравнение траектории:

$$\varphi = \int \frac{\dot\varphi}{\dot r}\,\mathrm{d}r = \int \frac{L}{r\sqrt{w(a-r)(r-p)}}\,\mathrm{d}r\,.$$

Интеграл табличный. В случае эллиптической или гиперболической скорости, когда $wap > 0$, и когда $(a+p)^2 > 4ap$, подходит решение: Двайт Г. Б. Таблицы интегралов, № 380.111, вариант 5. Записав решение в варианте с арккосинусом, получим уравнение траектории как $\varphi(r)$:

$$\varphi = \frac{L}{\sqrt{wap}} \arccos\frac{2ap-(a+p)r}{(a-p)r} + \varphi_0\,.$$

Чтобы получить уравнение траектории как функцию $r(\varphi)$, решим данное уравнение относительно $r$, и в результате, полагая $\varphi_0 = 0$, получим следующее уравнение:

$$r = \frac{f}{1+e\cos(i\varphi)}\,,$$

где $e$ – эксцентриситет орбиты, $f$ – фокальный параметр орбиты, $i$ – параметр смещения перицентра орбиты, и

$$e = \frac{a-p}{a+p}\,,\; f = \frac{2ap}{a+p}\,,\; i = \frac{\sqrt{wap}}{L}\,.$$

Полученное уравнение есть уравнение движения по вращающемуся коническому сечению, эллипсу или гиперболе. В случае же параболической скорости, когда $w = 0$ и $a = \infty$, уравнение скорости и форма траектории остаются здесь неопределёнными.

Заметим, что уравнение может быть записано в четырёх вариантах, с $\pm\cos$ и с $\pm\sin$, что дает четыре варианта ориентации траектории, в частности, начального положения перицентра траектории: справа, слева и выше, ниже центра, соответственно.

## 7. Интеграл времени как функции расстояния

Начнём с тождества

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}.$$

Из него получаем:

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{\dot{r}}\mathrm{d}r, \qquad t = \int \frac{1}{\dot{r}}\mathrm{d}r.$$

Подставив сюда выражение радиальной скорости как функции расстояния от центра тяготения, получаем следующий интеграл времени:

$$t = \int \frac{r}{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}\mathrm{d}r.$$

## 8. Период обращения

В общем случае, период обращения – это не время совершения полного оборота, равного 2π, но время, за которое проходится повторяющийся участок траектории, например, участок от перигелия до афелия и обратно до перигелия. Воспользовавшись интегралом времени, получаем для периода обращения определённый интеграл

$$T = 2\int_p^a \frac{r}{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}\mathrm{d}r.$$

Интеграл табличный. Для эллиптической скорости, когда $w$ больше нуля, и когда $(a + p)^2 > 4ap$, подходит решение: Двайт Г. Б. Таблицы интегралов, № 380.011, со ссылкой на № 380.001, вариант 5. Записывая решение в варианте с арккосинусом, получаем:

$$T = \frac{2}{\sqrt{w}}\left(\frac{a+p}{2}\arccos\frac{a+p-2r}{a-p} - \sqrt{(a-r)(r-p)}\right)\Bigg|_p^a,$$

то есть,

$$T = \frac{\pi(a+p)}{\sqrt{w}}.$$

## 9. Смещение перицентра траектории

Смещение перицентра определяется периодом функции

$$r(\varphi) = \frac{f}{1 + e\cos(i\varphi)},$$

задающей траекторию. Её период, совпадающий с периодом функции $\cos(i\varphi)$, в отличие от периода функции $\cos(\varphi)$, не равен полному обороту, 2π, но равен $2\pi/i$. Отличие периода функции $r(\varphi)$ от полного оборота и есть искомое смещение:

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{1}{i} - 1\right).$$

### 10. Гравитационное ускорение

Имея уравнение скорости как функции расстояния:

$$v^2 = -w + \frac{w(a+p)}{r} + \frac{L^2 - wap}{r^2},$$

нетрудно получить и аналогичное уравнение гравитационного ускорения.
Ускорение равно производной по расстоянию половины квадрата скорости:

$$g = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(-w + \frac{w(a+p)}{r} + \frac{L^2 - wap}{r^2}\right),$$

то есть,

$$g = -\left(\frac{w(a+p)}{2r^2} + \frac{L^2 - wap}{r^3}\right),$$

в согласии с теоремой Ньютона о движении тел по подвижным орбитам [1].
Знак минус указывает на направление ускорения, и может быть отброшен, если нас интересует только абсолютная величина ускорения.

## II. Динамика

Все полученные выше закономерности кинематические, в них встречаются только расстояние, время, скорость и ускорение, и не встречаются масса, сила или энергия. Чтобы из кинематической теории получить динамическую физическую теорию, требуется динамические параметры каким-либо образом связать с кинематическими. Нет никакого правила, которое предписывало бы, как именно это надо сделать, кроме требования, чтобы полученная теория соответствовала действительности.

### 1. Классическая динамика

В частности, если кинематическому выражению гравитационного ускорения поставить в соответствие выражение гравитационного ускорения классической теории тяготения:

$$\frac{w(a+p)}{2r^2} + \frac{L^2 - wap}{r^3} = \frac{\mathrm{G}M}{r^2},$$

то, приравнивая коэффициенты одинаковых степеней $r$,

$$\frac{w(a+p)}{2} = \mathrm{G}M, \quad L^2 - wap = 0,$$

получим:

$$w = \frac{2\mathrm{G}M}{a+p}, \quad L = \sqrt{wap}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения нашей кинематической теории, получим известные из классической теории тяготения закономерности движения в центральном поле тяготения:

$$v = \sqrt{2\mathrm{G}M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a+p}\right)},\ T = \pi\sqrt{\frac{(a+p)^3}{2\mathrm{G}M}},\ r = \frac{f}{1+e\cos(\varphi)},\ \Delta\varphi = 0, \text{ и др.}$$

## 2. Модифицированная динамика

Однако, как известно, классическая теория тяготения не вполне соответствует действительности. Перигелий орбит планет, и в особенности перигелий орбиты Меркурия, аномально (т.е. в противоречии с теорией) смещается.
Чтобы динамическая теория соответствовала действительности, следует динамические параметры связать с кинематикой по-другому. Возможно, так:

$$\frac{w(a+p)}{2r^2}+\frac{L^2-wap}{r^3}=\frac{\mathrm{G}M}{r^2}+\frac{6\mathrm{G}^2M^2}{c^2r^3},$$

где $c$ – скорость света. В построенной на такой связи модифицированной динамической теории движения в центральном поле, смещение перицентра траектории будет равно:

$$\Delta\varphi=2\pi\left(\sqrt{1+\frac{6\mathrm{G}M}{c^2f}}-1\right)\approx 2\pi\frac{3\mathrm{G}M}{c^2f}.$$

Последняя формула уже не раз появлялась в истории физики (как $\Delta\varphi=\frac{6\pi\mathrm{G}M}{c^2A\left(1-e^2\right)}$, где $A$ – большая полуось орбиты). Впервые её получил Пауль Гербер в 1898 году. Считается, что данная формула даёт смещение, соответствующее «наблюдаемому» аномальному смещению перигелия Меркурия, и других планет Солнечной системы. Так ли это на самом деле – мы узнаем, наверное, лишь, когда узнаем механизм работы тяготения, который по-прежнему, как и во времена Ньютона, остаётся для нас загадкой.

# III. Примеры

## 1. Классическая динамика

В учебном пособии Е. И. Бутикова [2, стр. 17] приведена задача:

> Баллистический снаряд запускается вертикально вверх с поверхности Земли с начальной скоростью, модуль которой равен круговой скорости для предельно низкой орбиты (т. е. первой космической скорости): $v_0=v_1=\sqrt{gR}$.
> Сколько времени продолжается полет снаряда от пуска до падения на Землю?

Приведённое там же решение – непрямое и излишне сложное. С помощью же полученных нами общих формул, задача решается в лоб, без каких-либо ухищрений.

Решение

1. Вертикальная траектория конечной высоты – это вырожденная эллиптическая орбита, перигей которой совпадает с центром тяготения, т.е. с центром Земли. Следовательно, для перигея орбиты имеем значение: $p = 0$.

2. Приравняв орбитальную скорость на поверхности Земли, т.е. на расстоянии $R$ от центра, к начальной скорости, получим уравнение

$$\sqrt{2\mathrm{G}M\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{a}\right)}=\sqrt{\frac{\mathrm{G}M}{R}},$$

из которого для апогея получаем значение: $a = 2R$.

3. Зная параметры орбиты, продолжительность полёта (подъёма с $r = R$ до $r = 2R$ и падения обратно на Землю) можно вычислить с помощью интеграла времени:

$$t = 2\int_R^{2R} \frac{r}{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}\,\mathrm{d}r\,.$$

Записав решение уже знакомого нам интеграла, имеем:

$$t = 2\sqrt{\frac{a+p}{2\mathrm{G}M}}\left(\frac{a+p}{2}\arccos\frac{a+p-2r}{a-p} - \sqrt{(a-r)(r-p)}\right)\Bigg|_R^{2R},$$

откуда получаем следующий результат:

$$t = (\pi + 2)\sqrt{\frac{R^3}{\mathrm{G}M}}\,.$$

Сравнивая это выражение с периодом обращения,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\mathrm{G}M}}\,,$$

получим, в согласии с оригинальным решением:

$$t = \frac{\pi+2}{2\pi}T = 0{,}82T\,.$$

## 2. Модифицированная динамика

> «OJ 287 представляет собой двойную систему чёрных дыр, бóльшая из которых имеет массу равную 18 миллиардам масс Солнца, фактически массу небольшой галактики. Меньший компаньон весит как 100 миллионов масс Солнца. Период его обращения составляет 12 лет».
>
> Этот объект интересен своим огромным смещением перицентра орбит, который составляет около 39 градусов за один период обращения. Такое смещение, в отличие от смещения перигелия Меркурия, можно показать графически.

Массы тел системы сравнимы по величине, поэтому мы имеем здесь задачу двух тел, сводящуюся к задаче движения в центральном поле. Решим её в относительной системе отсчёта, связанной с одним из тел.

Решение

Составим систему уравнений:

$$\left\{T = \pi\sqrt{\frac{(a+p)^3}{2\mathrm{G}M}},\ \ \Delta\varphi = 2\pi\left(\sqrt{1+\frac{6\mathrm{G}M}{c^2 f}} - 1\right)\right\},\ \text{где}\ M = m_1 + m_2\ \text{и}\ f = \frac{2ap}{a+p}\,.$$

Подставляя численные данные и решая систему относительно $a$ и $p$, получим следующие параметры орбиты одного компаньона относительно другого:

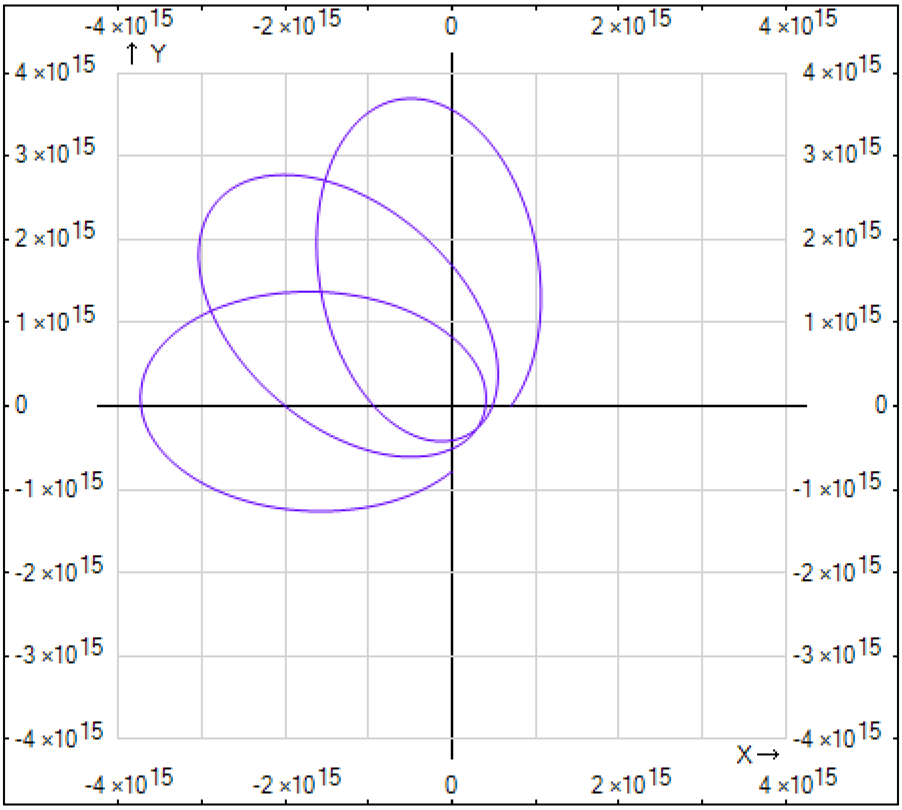
$a = 3{,}730\cdot10^{15}$, $p = 3{,}876\cdot10^{14}$,

$f = 7{,}022\cdot10^{14}$, $e = 0{,}812$, $i = 0{,}902$.

Построив график уравнения

$$r = \frac{7{,}022 \cdot 10^{14}}{1 - 0{,}812 \sin(0{,}902\,\varphi)}$$

в интервале [0; 5,5π], получим такую траекторию:




## Ссылки


1. Исаак Ньютон. Математические начала натуральной философии. — М.: Наука, 1989. О движении тел по подвижным орбитам и о перемещении апсид. Предложение XLIV Теорема XIV.
2. Бутиков Е. И. Закономерности кеплеровых движений. 2006.