Кинематика и динамика движения в центральном поле тяготения

Владимир Браун

01.06.2023

Иоганну Кеплеру стоило многих лет упорного труда, чтобы на основе многолетних астрономических наблюдений Тихо Браге получить кинематические законы движения планет, послужившие затем Ньютону в установлении динамического закона тяготения. В современных учебниках законы Кеплера, наоборот, выводятся из закона тяготения и законов сохранения момента импульса и энергии.
Здесь более общие кинематические уравнения движения пробного тела в центральном поле тяготения выводятся без обращения к закону тяготения, на основе одного только закона сохранения момента импульса и эмпирического факта, что движение планет происходит в ограниченной кольцевой области, между минимальным и максимальным расстоянием от центра тяготения.

I. Кинематика

1. Универсальное уравнение траектории

Используя две формы записи производной, по Ньютону и по Лейбницу, запишем в полярной системе координат (r, φ) тождества

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \quad \text{и} \quad \dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

Исключив из них время:

$$\mathrm{d}\varphi = \dot{\varphi}\,\mathrm{d}t\,, \quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}r}{\dot{r}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\varphi = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}}\mathrm{d}r\,,$$

и проинтегрировав почленно последнее уравнение, получим интеграл

$$\varphi = \int \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}}\mathrm{d}r\,,$$

который и представляет собой универсальное уравнение траектории, одно из двух возможных в полярной системе координат. Конечно, для тех случаев, когда угловая и радиальная скорости, $\dot{\varphi}$ и $\dot{r}$, представимы функциями от r и интеграл может быть взят.

2. Выражение скорости через радиальную и угловую скорости

Векторы радиальной и поперечной (трансверсальной) составляющих скорости ортогональны, поэтому квадрат скорости равен сумме квадратов этих составляющих:

$$v^2 = v_r^2 + v_\perp^2.$$

Поскольку радиальная составляющая скорости есть просто скорость изменения координаты r (радиальная скорость), а поперечная составляющая скорости есть скорость изменения угловой координаты (угловая скорость) умноженная на радиус r,

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\perp = r\dot{\varphi},$$

то имеем следующее выражение скорости через радиальную и угловую скорости:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2.$$

3. Представление угловой скорости как функции расстояния

Момент скорости тела в центральном поле постоянен:

$$rv_\perp = r^2\dot{\varphi} = L.$$

Отсюда получаем искомое представление угловой скорости как функции от r:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{r^2}.$$

4. Уравнение скорости как функции расстояния

Заменив угловую скорость в выражении скорости через составляющие,

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2,$$

её выражением через момент скорости и расстояние, получим уравнение, не содержащее угловой координаты:

$$v^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2}.$$

Движение планет происходит в ограниченной кольцевой области, между минимальным и максимальным расстоянием от центра тяготения, которые называются перигелием и афелием орбиты, и перицентром и апоцентром в общем случае. Обозначим их как p и a. При достижении границ указанной области радиальная составляющая скорости,

$$\dot{r} = \sqrt{v^2 - \frac{L^2}{r^2}},$$

становится равной нулю. Приравняв радиальную скорость к нулю, получим уравнение относительно r, корнями которого являются a и p – апоцентр и перицентр траектории:

$$v^2r^2 - L^2 = 0.$$

Предположим, что функция $v^2r^2 - L^2$ является многочленом от r. Наличие корней a и p означает, что многочлен делится на $(a - r)$ и $(r - p)$, и имеет представление:

$$v^2r^2 - L^2 = w(a - r)(r - p),$$

где w – некоторый многочлен. Из этого равенства получаем для скорости уравнение:

$$v^2 = \frac{w(a - r)(r - p)}{r^2} + \frac{L^2}{r^2},$$

или, после раскрытия скобок и объединения членов по степеням r:

$$v^2 = -w + \frac{w(a + p)}{r} + \frac{L^2 - wap}{r^2}.$$

Взяв значение квадрата скорости на бесконечно большом расстоянии от центра тяготения, предполагая, что значение w в r_∞ остаётся конечным, получим:

$$v_\infty^2 = -w\,.$$

То есть, многочлен $-w$ есть константа, квадрат остаточной скорости.

5. Представление радиальной скорости как функции расстояния

Имея уравнение скорости как функции расстояния, имеем вместе с тем и искомое представление радиальной скорости:

$$\dot r = \sqrt{v^2 - \frac{L^2}{r^2}} = \frac{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}{r}\,.$$

6. Уравнение траектории

Получив представления угловой и радиальной скорости как функций расстояния,

$$\dot\varphi = \frac{L}{r^2} \quad \text{и} \quad \dot r = \frac{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}{r}\,,$$

подставим их теперь в наше универсальное уравнение траектории:

$$\varphi = \int \frac{\dot\varphi}{\dot r}\,\mathrm{d}\,r = \int \frac{L}{r\sqrt{w(a-r)(r-p)}}\,\mathrm{d}\,r\,.$$

Интеграл табличный. В случае эллиптической или гиперболической скорости, когда $wap > 0$ и $a - p \neq 0$, подходит решение: [1], № 380.111, случай 5; которое может быть записано в четырёх вариантах, с ±arccos и с ±arcsin. Записав решение в варианте с arccos, получим уравнение траектории как функцию $\varphi(r)$:

$$\varphi = \frac{L}{\sqrt{wap}}\arccos\frac{2ap - (a+p)r}{(a-p)r} + \varphi_0\,.$$

Чтобы получить уравнение траектории как функцию $r(\varphi)$, решим данное уравнение относительно r, и в результате, полагая $\varphi_0 = 0$, получим следующее уравнение:

$$r = \frac{f}{1 + e\cos(i\varphi)}\,,$$

где e – эксцентриситет орбиты, f – фокальный параметр орбиты, i – параметр смещения перицентра орбиты, и

$$e = \frac{a-p}{a+p},\; f = \frac{2ap}{a+p},\; i = \frac{\sqrt{wap}}{L}\,.$$

Полученное уравнение есть уравнение движения по вращающемуся коническому сечению, эллипсу или гиперболе. В случае же параболической скорости, когда $w = 0$ и $a = \infty$, уравнение скорости и форма траектории остаются пока неопределёнными. Заметим, что уравнение может быть записано в четырёх вариантах, с ±cos и с ±sin, что дает четыре варианта ориентации траектории, в частности, начального положения перицентра траектории: справа, слева, и выше, ниже центра, соответственно.

7. Интеграл времени как функции расстояния

Начнём с тождества

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}\, r}{\mathrm{d}\, t}.$$

Из него получаем:

$$\mathrm{d}\, t = \frac{1}{\dot{r}}\mathrm{d}\, r, \qquad t = \int \frac{1}{\dot{r}}\mathrm{d}\, r.$$

Подставив сюда выражение радиальной скорости как функции расстояния от центра тяготения, получаем следующий интеграл времени:

$$t = \int \frac{r}{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}\mathrm{d}\, r.$$

8. Период обращения

В общем случае период обращения – это не время совершения полного оборота, равного 2π, но время, за которое проходится повторяющийся участок траектории, например, участок от перигелия до афелия и обратно до перигелия. Воспользовавшись интегралом времени, получаем для периода обращения определённый интеграл

$$T = 2\int_p^a \frac{r}{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}\mathrm{d}\, r.$$

Интеграл табличный. Для эллиптической скорости, когда $w > 0$ и $a - p \neq 0$, подходит решение: [1], № 380.011, со ссылкой на № 380.001, случай 5. Записывая решение в варианте с арккосинусом, получаем:

$$T = \frac{2}{\sqrt{w}}\left(\frac{a+p}{2}\arccos\frac{a+p-2r}{a-p} - \sqrt{(a-r)(r-p)}\right)\Bigg|_p^a,$$

то есть,

$$T = \frac{\pi(a+p)}{\sqrt{w}}.$$

9. Смещение перицентра траектории

Смещение перицентра определяется периодом функции

$$r(\varphi) = \frac{f}{1 + e\cos(i\varphi)},$$

задающей траекторию. Её период, совпадающий с периодом функции $\cos(i\varphi)$, в отличие от периода функции $\cos(\varphi)$, не равен полному обороту, 2π, но равен $2\pi/i$. Отличие периода функции $r(\varphi)$ от полного оборота и есть искомое смещение:

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{1}{i} - 1\right).$$

10. Гравитационное ускорение

Имея уравнение скорости как функции расстояния:

$$v^2 = -w + \frac{w(a+p)}{r} + \frac{L^2 - wap}{r^2},$$

нетрудно получить и аналогичное уравнение гравитационного ускорения.
Ускорение равно производной по расстоянию половины квадрата скорости:

$$g = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(-w + \frac{w(a+p)}{r} + \frac{L^2 - wap}{r^2}\right),$$

то есть,

$$g = -\left(\frac{w(a+p)}{2r^2} + \frac{L^2 - wap}{r^3}\right),$$

в согласии с теоремой Ньютона о движении тел по подвижным орбитам [2].
(Знак минус указывает здесь на направление ускорения, и может быть отброшен, если нас интересует только абсолютная величина ускорения.)

II. Динамика

Все полученные выше закономерности кинематические, в них встречаются только расстояние, время, скорость и ускорение, и не встречаются масса, сила или энергия. Чтобы из кинематической теории получить динамическую физическую теорию, требуется динамические параметры каким-либо образом связать с кинематическими. Нет никакого правила, которое предписывало бы как именно это надо сделать, кроме требования, чтобы полученная теория соответствовала действительности.

1. Классическая динамика

В частности, если кинематическому выражению гравитационного ускорения поставить в соответствие выражение гравитационного ускорения классической теории тяготения:

$$\frac{w(a+p)}{2r^2} + \frac{L^2 - wap}{r^3} = \frac{\mathrm{G}M}{r^2},$$

то, приравнивая коэффициенты одинаковых степеней r,

$$\frac{w(a+p)}{2} = \mathrm{G}M, \quad L^2 - wap = 0,$$

получим:

$$w = \frac{2\mathrm{G}M}{a+p}, \quad L = \sqrt{wap} = \sqrt{f\mathrm{G}M}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения нашей кинематической теории, получим известные из классической теории тяготения закономерности движения в центральном поле тяготения:

$$v = \sqrt{2\mathrm{G}M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a+p}\right)},\ T = \pi\sqrt{\frac{(a+p)^3}{2\mathrm{G}M}},\ r = \frac{f}{1 + e\cos\varphi},\ \Delta\varphi = 0,\ \text{и др.}$$

2. Модифицированная динамика

Однако классическая теория тяготения, возможно, не вполне соответствует действительности. Перигелий орбит планет, и в особенности перигелий орбиты Меркурия, по неизвестной причине, будто бы, аномально (т.е. в противоречие с теорией) смещается [3].

Если аномальное смещение действительно имеет место, то проблему можно решить, связав динамические параметры с кинематикой по-другому, например, так:

$$\frac{w(a+p)}{2r^2}+\frac{L^2-wap}{r^3}=\frac{\mathrm{G}M}{r^2}+\frac{6\mathrm{G}^2M^2}{c^2r^3},$$

где c – скорость света.
В построенной на такой связи модифицированной динамической теории движения в центральном поле, смещение перицентра траектории будет равно:

$$\Delta\varphi=2\pi\left(\sqrt{1+\frac{6\mathrm{G}M}{c^2f}}-1\right)\approx 2\pi\frac{3\mathrm{G}M}{c^2f}.$$

Последняя формула уже не раз появлялась в истории физики, как

$$\Delta\varphi=\frac{6\pi\mathrm{G}M}{c^2A\left(1-e^2\right)},$$

где A – большая полуось орбиты, и $A\left(1-e^2\right)=f$.
Для смещения перигелия Меркурия формула даёт значение 43" в столетие, соответствующее «наблюдаемому» аномальному смещению планеты. Считается, что формула пригодна и для других планет Солнечной системы, хотя в этом случае совпадение уже не такое хорошее.

В последнее время, однако, появились сомнения в достоверности аномального смещения перигелия планет. «В наблюдаемом смещении перигелия Меркурия помимо среднего имеются колебательные составляющие, суммарная амплитуда которых достигает 20″, с периодами от нескольких лет до нескольких десятков лет. Из-за наличия этих составляющих при вычислении среднего смещения по данным наблюдений на интервалах в десятки и даже сотни лет относительная погрешность может быть сопоставима с указанной выше величиной в 2,5%. Поэтому утверждения о том, что наблюдаемое смещение перигелия Меркурия не объясняется полностью в рамках классической механики, нельзя признать строго обоснованными» [4].

III. Примеры

1. Классическая динамика

Пример 1. В учебном пособии [5] на стр. 17 приведена задача:

> Баллистический снаряд запускается вертикально вверх с поверхности Земли с начальной скоростью, модуль которой равен круговой скорости для предельно низкой орбиты (т. е. первой космической скорости): $v_0 = v_1 = \sqrt{gR}$.
> Сколько времени продолжается полет снаряда от пуска до падения на Землю?

Приведённое там же решение – непрямое и излишне сложное. С помощью уравнения орбитальной скорости и интеграла времени как функции расстояния от центра тяготения задача решается в лоб, без всяких ухищрений.

1. Вертикальная траектория конечной высоты – это вырожденная эллиптическая орбита, перигей которой совпадает с центром тяготения, т.е. с центром Земли. Следовательно, для перигея орбиты имеем значение $p = 0$.

2. Приравняв орбитальную скорость на поверхности Земли, т.е. на расстоянии R от центра, к начальной скорости, получим уравнение

$$\sqrt{2\mathrm{G}M\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{\mathrm{G}M}{R}} ,$$

из которого для апогея получаем значение $a = 2R$.

3. Зная параметры орбиты, продолжительность полёта (подъёма с $r = R$ до $r = 2R$ и падения обратно на Землю) можно вычислить с помощью интеграла времени:

$$t = 2\int_R^{2R} \frac{r}{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}\,\mathrm{d}r .$$

Записав решение уже знакомого нам интеграла, имеем:

$$t = 2\sqrt{\frac{a+p}{2\mathrm{G}M}}\left(\frac{a+p}{2}\arccos\frac{a+p-2r}{a-p} - \sqrt{(a-r)(r-p)}\right)\Bigg|_R^{2R} ,$$

откуда получаем следующий результат:

$$t = (\pi+2)\sqrt{\frac{R^3}{\mathrm{G}M}} .$$

Сравнивая это выражение с периодом обращения,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\mathrm{G}M}} ,$$

получим, в согласии с оригинальным решением:

$$t = \frac{\pi+2}{2\pi}T = 0{,}82T .$$

Пример 2. На олимпиаде по физике старшеклассникам была предложена задача:

> С поверхности планеты радиуса R и массы M в горизонтальном направлении запускают снаряд, начальная скорость которого составляет 80% от второй космической скорости для данной планеты. На какое максимальное расстояние от центра планеты удалится снаряд, и какую наименьшую скорость он будет иметь во время полета? Атмосферы у планеты нет, и ее вращение не учитывать.

Уравнение орбитальной скорости делает задачу совсем простой.

1. При горизонтальном запуске снаряда, точка запуска является ближайшей к центру тяготения точкой орбиты, перицентром орбиты,

$$p = R.$$

2. Приравняв орбитальную скорость на поверхности планеты, т.е. на расстоянии R от центра, к начальной скорости, получим уравнение

$$\sqrt{2\mathrm{G}M\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a+R}\right)} = 0{,}8\sqrt{\frac{2\mathrm{G}M}{R}},$$

из которого для апоцентра, максимального расстояния от центра, получаем значение

$$a = \frac{16}{9}R.$$

3. Минимальная скорость снаряда в апоцентре орбиты равна:

$$v_{\min} = v_a = \sqrt{2\mathrm{G}M\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+p}\right)} = 0{,}45\sqrt{\frac{2\mathrm{G}M}{R}}.$$

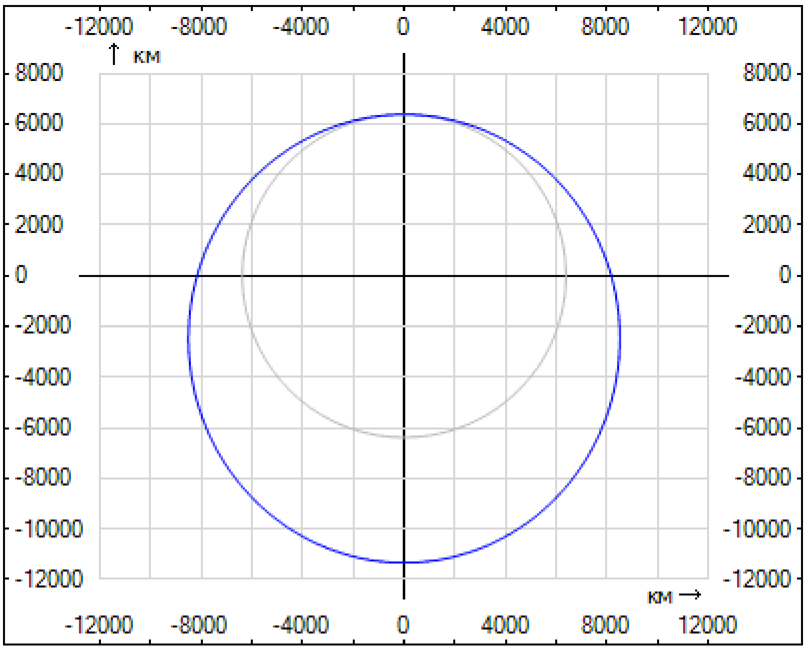


Рис. 1. Траектория снаряда, запущенного с поверхности планеты в горизонтальном направлении со скоростью, равной 0,8 скорости освобождения.

Пример 3. Скорость света на Солнце. Первое приближение

> Предполагая, что свет в поле тяготения звёзд подчиняется тем же законам, что и движение вещества – законам Кеплера, определить скорость света на Солнце, если скорость света на расстоянии 1 а.е. от Солнца равна *c*, 299792458 м/с.

Задача почти не отличается от предыдущей, и решается так же просто. Но здесь мы применим немного другой способ, не требующий определения параметров траектории, который пригодится нам в следующей задаче, где определить параметры траектории принципиально невозможно.

1. Из исходного уравнения скорости, не содержащего параметров траектории,

$$c_r = \sqrt{c_\infty^2 + \frac{2GM}{r}},$$

имеем для остаточной скорости света:

$$c_\infty = \sqrt{c_r^2 - \frac{2GM}{r}}.$$

2. Скорость света на поверхности Солнца, на расстоянии R от центра, равна:

$$c_R = \sqrt{c_\infty^2 + \frac{2GM}{R}},$$

или, после подстановки выражения остаточной скорости:

$$c_R = \sqrt{c_r^2 + 2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)}.$$

Имеем:	G = 6,67384e-11 м³/с²/кг	– гравитационная постоянная,
	M = 1,9891e30 кг	– масса Солнца,
	R = 695510000 м	– радиус Солнца,
	r = 149597870700 м	– 1 а.е.,
	c_r = 299792458 м/с	– скорость света на расстоянии 1 а.е. от Солнца.

Отсюда, для скорости света на поверхности Солнца получаем значение:

$$c_R = 299793091{,}700 \text{ м/с}.$$

Пример 4. Скорость света на Солнце. Уточнение

> В систему тел, помимо Солнца, на расстоянии 1 а.е. от него, добавляется второе тело – Земля. Скорость света считается равной *c* на поверхности Земли. Определить скорость света на Солнце.

Добавление в систему второго тела качественно изменяет задачу. Непосредственно применить уравнение скорости движения в центральном поле, использованное нами в предыдущих примерах, нельзя – поле тяготения двух тел не центральное. Однако можно использовать обобщение этого уравнения на не центральное поле тяготения.

Чтобы понять, как выглядит такое обобщение, запишем уравнение скорости движения в центральном поле в следующем компактном виде:

$$v^2 = v_\infty^2 + 2u\,,$$

где u – (положительный, кинетический) потенциал поля тяготения.
В таком общем виде уравнение скорости справедливо и в не центральном поле, с тем отличием, что теперь остаточная скорость и потенциал не имеют простых выражений

$$v_\infty^2 = -\frac{2\mathrm{G}M}{a+p} \qquad \text{и} \qquad u = \frac{\mathrm{G}M}{r}\,,$$

которые так удобны в центральном поле.
Остаточная скорость вообще остаётся без какого-либо общего выражения. Потенциал же, в каждой точке поля будет теперь суммой потенциалов тел системы в этой точке:

$$u = u_1 + u_2 \cdots + u_n = \mathrm{G}\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \cdots + \frac{m_n}{r_n}\right).$$

Обобщённое уравнение скорости даёт возможность легко решить нашу задачу.

1. По условию, на поверхности Земли для скорости света выполняется равенство:

$$c = \sqrt{c_\infty^2 + 2\mathrm{G}\left(\frac{M}{r_3} + \frac{m_3}{R_3}\right)}\,,$$

отсюда, остаточная скорость света равна:

$$c_\infty = \sqrt{c^2 - 2\mathrm{G}\left(\frac{M}{r_3} + \frac{m_3}{R_3}\right)}\,.$$

2. Скорость света на поверхности Солнца будет равна:

$$C = \sqrt{c_\infty^2 + 2\mathrm{G}\left(\frac{M}{R} + \frac{m_3}{r_3}\right)}\,,$$

или, после подстановки выражения остаточной скорости:

$$C = \sqrt{c^2 + 2\mathrm{G}\left(\frac{M}{R} + \frac{m_3 - M}{r_3} - \frac{m_3}{R_3}\right)}\,.$$

Здесь m_3 = 5,9726e24 кг – масса Земли,
R_3 = 6371000 м – радиус Земли,
r_3 = 1 а.е. – расстояние от Земли до Солнца.

Отсюда, для скорости света на поверхности Солнца получаем значение:

$$C = 299793091{,}492 \text{ м/с},$$

на 633,492 м/с больше скорости света на Земле, и на 0,208 м/с меньше предыдущего значения. Для остаточной скорости света получим значение:

$$c_\infty = 299792454{,}831 \text{ м/с},$$

всего на 3,169 м/с меньше скорости света на Земле.

Пример 5. Скорость света на Солнце, Луне и планетах

> В систему тел, помимо Солнца и Земли, добавляются все планеты, а также спутник Земли, Луна. Скорость света считается равной c на поверхности Земли. Определить скорость света на Солнце, Луне и планетах.

Точное значение скорости в данной задаче можно получить только на конкретную астрономическую эпоху, дату, для конкретного расположения планет. Но мы этого делать не будем, и вычислим среднее, на длительном промежутке времени, значение скорости. Для этого, для каждого тела будем учитывать лишь среднее, относительно него, положение каждого из остальных тел за длительный промежуток времени. При таком упрощении, данная задача так же не представляет большой сложности.

Луна, обращаясь вокруг Земли, в среднем находится от неё на расстоянии большой полуоси своей орбиты, $r_{\text{Л}}$. Внутренние, по отношению к какой-либо планете, планеты, обращаясь вокруг Солнца, в среднем находятся от этой планеты на том же расстоянии, что и Солнце – на расстоянии большой полуоси орбиты данной планеты, $r_{\text{Пл}}$. Внешние, по отношению к какой-либо планете, планеты в среднем находятся от этой планеты на том же расстоянии, что и от Солнца – на расстоянии большой полуоси своей орбиты, $r_{\text{Вн}}$.

С учётом этого, получаем для скорости света на телах системы следующие выражения.

Солнце:

$$C = \sqrt{c_\infty^2 + 2\mathrm{G}\left(\frac{M}{R} + \frac{m_{\text{М}}}{r_{\text{М}}} + \frac{m_{\text{В}}}{r_{\text{В}}} + \frac{m_{\text{З}} + m_{\text{Л}}}{r_{\text{З}}} + \frac{m_{\text{Ма}}}{r_{\text{Ма}}} + \frac{m_{\text{Ю}}}{r_{\text{Ю}}} + \frac{m_{\text{С}}}{r_{\text{С}}} + \frac{m_{\text{У}}}{r_{\text{У}}} + \frac{m_{\text{Н}}}{r_{\text{Н}}} + \frac{m_{\text{П}}}{r_{\text{П}}}\right)},$$

Меркурий:

$$c_{\text{М}} = \sqrt{c_\infty^2 + 2\mathrm{G}\left(\frac{M}{r_{\text{М}}} + \frac{m_{\text{М}}}{R_{\text{М}}} + \frac{m_{\text{В}}}{r_{\text{В}}} + \frac{m_{\text{З}} + m_{\text{Л}}}{r_{\text{З}}} + \frac{m_{\text{Ма}}}{r_{\text{Ма}}} + \frac{m_{\text{Ю}}}{r_{\text{Ю}}} + \frac{m_{\text{С}}}{r_{\text{С}}} + \frac{m_{\text{У}}}{r_{\text{У}}} + \frac{m_{\text{Н}}}{r_{\text{Н}}} + \frac{m_{\text{П}}}{r_{\text{П}}}\right)},$$

Венера:

$$c_{\text{В}} = \sqrt{c_\infty^2 + 2\mathrm{G}\left(\frac{M + m_{\text{М}}}{r_{\text{В}}} + \frac{m_{\text{В}}}{R_{\text{В}}} + \frac{m_{\text{З}} + m_{\text{Л}}}{r_{\text{З}}} + \frac{m_{\text{Ма}}}{r_{\text{Ма}}} + \frac{m_{\text{Ю}}}{r_{\text{Ю}}} + \frac{m_{\text{С}}}{r_{\text{С}}} + \frac{m_{\text{У}}}{r_{\text{У}}} + \frac{m_{\text{Н}}}{r_{\text{Н}}} + \frac{m_{\text{П}}}{r_{\text{П}}}\right)},$$

Луна:

$$c_{\text{Л}} = \sqrt{c_\infty^2 + 2\mathrm{G}\left(\frac{M + m_{\text{М}} + m_{\text{В}}}{r_{\text{З}}} + \frac{m_{\text{З}}}{r_{\text{Л}}} + \frac{m_{\text{Л}}}{R_{\text{Л}}} + \frac{m_{\text{Ма}}}{r_{\text{Ма}}} + \frac{m_{\text{Ю}}}{r_{\text{Ю}}} + \frac{m_{\text{С}}}{r_{\text{С}}} + \frac{m_{\text{У}}}{r_{\text{У}}} + \frac{m_{\text{Н}}}{r_{\text{Н}}} + \frac{m_{\text{П}}}{r_{\text{П}}}\right)},$$

Марс:

$$c_{\text{Ма}} = \sqrt{c_\infty^2 + 2\mathrm{G}\left(\frac{M + m_{\text{М}} + m_{\text{В}} + m_{\text{З}} + m_{\text{Л}}}{r_{\text{Ма}}} + \frac{m_{\text{Ма}}}{R_{\text{Ма}}} + \frac{m_{\text{Ю}}}{r_{\text{Ю}}} + \frac{m_{\text{С}}}{r_{\text{С}}} + \frac{m_{\text{У}}}{r_{\text{У}}} + \frac{m_{\text{Н}}}{r_{\text{Н}}} + \frac{m_{\text{П}}}{r_{\text{П}}}\right)},$$

Юпитер:

$$c_{\text{Ю}} = \sqrt{c_\infty^2 + 2\mathrm{G}\left(\frac{M + m_{\text{М}} + m_{\text{В}} + m_{\text{З}} + m_{\text{Л}} + m_{\text{Ма}}}{r_{\text{Ю}}} + \frac{m_{\text{Ю}}}{R_{\text{Ю}}} + \frac{m_{\text{С}}}{r_{\text{С}}} + \frac{m_{\text{У}}}{r_{\text{У}}} + \frac{m_{\text{Н}}}{r_{\text{Н}}} + \frac{m_{\text{П}}}{r_{\text{П}}}\right)},$$

Сатурн:

$$c_{\text{С}} = \sqrt{c_\infty^2 + 2G\left(\frac{M + m_{\text{М}} + m_{\text{В}} + m_{\text{З}} + m_{\text{Л}} + m_{\text{Ма}} + m_{\text{Ю}}}{r_{\text{С}}} + \frac{m_{\text{С}}}{R_{\text{С}}} + \frac{m_{\text{У}}}{r_{\text{У}}} + \frac{m_{\text{Н}}}{r_{\text{Н}}} + \frac{m_{\text{П}}}{r_{\text{П}}}\right)},$$

Уран:

$$c_{\text{У}} = \sqrt{c_\infty^2 + 2G\left(\frac{M + m_{\text{М}} + m_{\text{В}} + m_{\text{З}} + m_{\text{Л}} + m_{\text{Ма}} + m_{\text{Ю}} + m_{\text{С}}}{r_{\text{У}}} + \frac{m_{\text{У}}}{R_{\text{У}}} + \frac{m_{\text{Н}}}{r_{\text{Н}}} + \frac{m_{\text{П}}}{r_{\text{П}}}\right)},$$

Нептун:

$$c_{\text{Н}} = \sqrt{c_\infty^2 + 2G\left(\frac{M + m_{\text{М}} + m_{\text{В}} + m_{\text{З}} + m_{\text{Л}} + m_{\text{Ма}} + m_{\text{Ю}} + m_{\text{С}} + m_{\text{У}}}{r_{\text{Н}}} + \frac{m_{\text{Н}}}{R_{\text{Н}}} + \frac{m_{\text{П}}}{r_{\text{П}}}\right)},$$

Плутон:

$$c_{\text{П}} = \sqrt{c_\infty^2 + 2G\left(\frac{M + m_{\text{М}} + m_{\text{В}} + m_{\text{З}} + m_{\text{Л}} + m_{\text{Ма}} + m_{\text{Ю}} + m_{\text{С}} + m_{\text{У}} + m_{\text{Н}}}{r_{\text{П}}} + \frac{m_{\text{П}}}{R_{\text{П}}}\right)}.$$

Для скорости света на Земле имеем равенство:

$$c = \sqrt{c_\infty^2 + 2G\left(\frac{M + m_{\text{М}} + m_{\text{В}}}{r_{\text{З}}} + \frac{m_{\text{З}}}{R_{\text{З}}} + \frac{m_{\text{Л}}}{r_{\text{Л}}} + \frac{m_{\text{Ма}}}{r_{\text{Ма}}} + \frac{m_{\text{Ю}}}{r_{\text{Ю}}} + \frac{m_{\text{С}}}{r_{\text{С}}} + \frac{m_{\text{У}}}{r_{\text{У}}} + \frac{m_{\text{Н}}}{r_{\text{Н}}} + \frac{m_{\text{П}}}{r_{\text{П}}}\right)},$$

из которого для остаточной скорости света получаем выражение:

$$c_\infty = \sqrt{c^2 - 2G\left(\frac{M + m_{\text{М}} + m_{\text{В}}}{r_{\text{З}}} + \frac{m_{\text{З}}}{R_{\text{З}}} + \frac{m_{\text{Л}}}{r_{\text{Л}}} + \frac{m_{\text{Ма}}}{r_{\text{Ма}}} + \frac{m_{\text{Ю}}}{r_{\text{Ю}}} + \frac{m_{\text{С}}}{r_{\text{С}}} + \frac{m_{\text{У}}}{r_{\text{У}}} + \frac{m_{\text{Н}}}{r_{\text{Н}}} + \frac{m_{\text{П}}}{r_{\text{П}}}\right)}.$$

Отсюда, остаточная скорость света в системе (Солнце, Земля, Луна и планеты) равна:

c_∞ = 299792454,831 м/с,

и для скорости света на поверхности тел системы получаем следующие значения:

Небесное тело	Масса	Радиус	Большая полуось орбиты	Скорость света на поверхности	Отличие от *c*
Солнце	1,9891e30	695510000	–	299793091,492	633,492
Меркурий	3,3302e23	2439700	57909227000	299792462,508	4,508
Венера	4,8675e24	6051800	108208930000	299792459,102	1,102
Земля	5,9726e24	6371000	149597870700	299792458,000	0,000
Луна	7,3477e22	1737100	384400000	299792457,804	-0,196
Марс	6,4171e23	3389500	227943820000	299792456,816	-1,184
Юпитер	1,8986e27	69911000	778547200000	299792461,445	3,445
Сатурн	5,6846e26	58232000	1433449369000	299792457,314	-0,686
Уран	8,6813e25	25362000	2876679082000	299792455,747	-2,253
Нептун	1,0243e26	24622000	4503443661000	299792455,855	-2,145
Плутон	1,3030e22	1188300	5906440634000	299792454,908	-3,092

Пример 6. Гравитационное отклонение света

> Предполагая, что свет в поле тяготения звёзд подчиняется тем же законам, что и движение вещества – законам Кеплера, определить величину изгиба (отклонения от прямой) гиперболической траектории луча света звезды, проходящего на некотором расстоянии от Солнца.

Подходящее уравнение траектории и полученное нами выражение остаточной скорости приводят к исключительно простому решению.

1. Уравнение кеплеровой траектории в полярной системе координат (r, φ) даёт зависимость полярного угла от расстояния:

$$r = \frac{f}{1 - e\sin\varphi} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arcsin\frac{r-f}{er}.$$

Гипербола с таким уравнением расположена вдоль полярной оси:

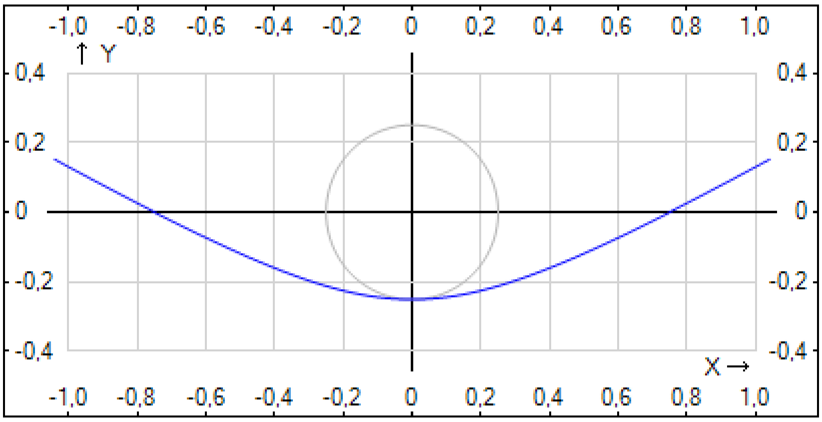


Рис. 2. Гипербола (верхняя ветвь).

Отсюда ясно, что вдали от центра для малого угла отклонения верно:

$$\gamma \approx \gamma_\infty = 2\varphi_\infty = 2\lim_{r\to\infty}\arcsin\frac{r-f}{er} = 2\arcsin\frac{1}{e} \approx \frac{2}{e}.$$

2. Исключив из уравнений

$$e = \frac{a-p}{a+p}, \quad c_\infty^2 = -\frac{2\mathrm{G}M}{a+p}$$

параметр a, выразим эксцентриситет траектории через остаточную скорость:

$$e = 1 + \frac{c_\infty^2 p}{\mathrm{G}M}.$$

Остаточная скорость света в поле тяготения Солнца лишь немногим меньше скорости света на Земле, c, поэтому имеем также:

$$e \approx 1 + \frac{c^2 p}{\mathrm{G}M}.$$

Подставив числовые значения входящих параметров, получим для эксцентриситета и отклонения, луча света проходящего вблизи поверхности Солнца, следующие значения:

$$e = 470883, \quad \gamma = 0{,}0000042473 \text{ рад} = 0{,}876''.$$

Пример 7. Гравитационное отклонение света на конечном расстоянии от центра

В предыдущем примере отклонение луча света в поле тяготения определялось как предельное отклонение на бесконечно большом удалении от центра. Здесь мы ставим задачу определить отклонение на конечном расстоянии от центра.

Полученные нами выражения угловой и радиальной скорости,

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{wap}}{r^2} \quad \text{и} \quad \dot{r} = \frac{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}{r},$$

позволяют легко решить эту задачу.

1. Как ясно из рисунка 2, текущий угол отклонения от направления полярной оси равен сумме угла радиус-вектора с полярной осью, φ, и угла траектории с радиус-вектором, θ:

$$\chi = \varphi + \theta.$$

Угол φ задаётся уравнением траектории:

$$\varphi = \arcsin\frac{r-f}{er} = \arcsin\frac{(a+p)r - 2ap}{(a-p)r}.$$

Тангенс угла траектории с радиус-вектором равен отношению поперечной и радиальной составляющих скорости:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_\perp}{v_r} = \frac{r\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \sqrt{\frac{ap}{(a-r)(r-p)}},$$

откуда

$$\theta = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ap}{(a-r)(r-p)}}.$$

Отсюда, для текущего отклонения от направления полярной оси имеем:

$$\chi = \arcsin\frac{(a+p)r-2ap}{(a-p)r} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ap}{(a-r)(r-p)}} = \arcsin\left(\frac{1}{e}\sqrt{\frac{(r-a)(r-p)}{(r-a-p)r}}\right).$$

И в итоге, для текущего отклонения от начального направления получаем формулу:

$$\gamma = \chi_R \pm \chi = \arcsin\left(\frac{1}{e}\sqrt{\frac{(R-a)(R-p)}{(R-a-p)R}}\right) \pm \arcsin\left(\frac{1}{e}\sqrt{\frac{(r-a)(r-p)}{(r-a-p)r}}\right),$$

где R – расстояние от источника света (звезды) до центра тяготения (Солнца). Знаки минус и плюс используется здесь для получения отклонения в месте наблюдения находящемся до и после перицентра, соответственно.

2. Расстояние до звёзд настолько велико, что может считаться бесконечным, тогда

$$\chi_R = \lim_{R\to\infty} \arcsin\left(\frac{1}{e}\sqrt{\frac{(R-a)(R-p)}{(R-a-p)R}}\right) = \arcsin\frac{1}{e},$$

и формула текущего отклонения от начального направления примет вид:

$$\gamma = \arcsin\frac{1}{e} \pm \arcsin\left(\frac{1}{e}\sqrt{\frac{(r-a)(r-p)}{(r-a-p)r}}\right).$$

3. Для света оба варианта формулы, пригодные и для тел, несколько упрощаются – при очень малых углах арксинус практически равен своему аргументу. В итоге, для текущего отклонения луча света от начального направления мы имеем формулу:

$$\gamma = \frac{1}{e}\left(1 \pm \sqrt{\frac{(r-a)(r-p)}{(r-a-p)r}}\right) = \frac{1}{e}\left(1 \pm \sqrt{\left(1-\frac{p}{r}\right)\left(1+\frac{p}{r-a-p}\right)}\right).$$

И для луча света проходящего вблизи поверхности Солнца получаем, на разных расстояниях до и после перигелия, следующие значения отклонения:

	r	γ
Звезда	∞	0"
Плутон	39,5447 а.е.	0,000 000 003"
Нептун	30,1104 а.е.	0,000 000 005"
Уран	19,2185 а.е.	0,000 000 013"
Сатурн	9,5549 а.е.	0,000 000 052"
Юпитер	5,2026 а.е.	0,000 000 175"
Марс	1,5237 а.е.	0,000 002 039"
Земля	1,0000 а.е.	0,000 004 734"
Венера	0,7233 а.е.	0,000 009 049"
Меркурий	0,3871 а.е.	0,000 031 594"
	0,1000 а.е.	0,000 473 668"
	0,0100 а.е.	0,050 219 940"
	0,0070 а.е.	0,110 569 460"
	0,0050 а.е.	0,276 855 311"
Перигелий	6,9551e+8	0,438 038 057"
	0,0050 а.е.	0,599 220 802"
	0,0070 а.е.	0,765 506 653"
	0,0100 а.е.	0,825 856 174"
	0,1000 а.е.	0,875 602 445"
Меркурий	0,3871 а.е.	0,876 044 519"
Венера	0,7233 а.е.	0,876 067 064"
Земля	1,0000 а.е.	0,876 071 379"
Марс	1,5237 а.е.	0,876 074 074"
Юпитер	5,2026 а.е.	0,876 075 938"
Сатурн	9,5549 а.е.	0,876 076 061"
Уран	19,2185 а.е.	0,876 076 100"
Нептун	30,1104 а.е.	0,876 076 108"
Плутон	39,5447 а.е.	0,876 076 110"
	∞	0,876 076 113"

И наконец, заметим, что, для света, приближённая формула текущего отклонения

$$\gamma = \frac{1}{e}\left(1 \pm \sqrt{1-\left(\frac{p}{r}\right)^2}\right)$$

даёт не менее 6-ти точных знаков секунды после запятой, и не требует параметра a.

Пример 8. Параболическая скорость

1. Баллистический снаряд запускается вертикально вверх с поверхности Земли с начальной скоростью равной скорости освобождения (параболической скорости, второй космической скорости): $v_0 = v_2 = \sqrt{2\mathrm{G}M/R}$.
Какой высоты снаряд достигнет через минуту полёта?

2. То же, что в п. 1, но с тем отличием, что снаряд запускается горизонтально.

Какова разность этих высот? Какой она станет через час, сутки полёта?
К чему она стремится при неограниченном росте времени полёта?
Каково максимальное её значение?

1. Выше нами получено кинематическое уравнение радиальной скорости движения в центральном поле тяготения

$$\dot{r} = \frac{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}{r},$$

где r – расстояние от центра тяготения, центра полярной системы координат (r, φ),
a и p – максимальное и минимальное расстояние от центра, апоцентр и перицентр траектории движения, w – квадрат остаточной скорости со знаком минус, $w = -v_\infty^2$.
И для w получено выражение

$$w = \frac{2\mathrm{G}M}{a+p}.$$

В итоге, мы имеем для радиальной скорости движения в центральном поле тяготения уравнение

$$\dot{r} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2\mathrm{G}M(a-r)(r-p)}{a+p}}.$$

2. В случае параболической скорости $a = \infty$ и, следовательно,

$$\frac{a-r}{a+p} = 1,$$

и уравнение радиальной скорости упрощается до

$$\dot{r} = \frac{\sqrt{2\mathrm{G}M(r-p)}}{r}.$$

3. Таким образом, для параболической скорости мы имеем интеграл времени

$$t = \int \frac{1}{\dot{r}}\,dr = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{G}M}}\int \frac{r}{\sqrt{r-p}}\,dr,$$

взяв который получаем уравнение зависимости времени от расстояния, $t(r)$:

$$t = \frac{r+2p}{3}\sqrt{\frac{2(r-p)}{\mathrm{G}M}}.$$

4. Относительно r данное уравнение сводится к кубическому уравнению, решив которое мы получаем для параболической скорости следующее уравнение зависимости расстояния от времени, $r(t)$:

$$r = p + \frac{1}{2}\left(y - \frac{2p}{y}\right)^2, \text{ где } \; y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 + 8p^3}} \quad \text{и} \quad x = 3\sqrt{\mathrm{G}M}\,t\,.$$

5. В случае вырожденной вертикальной параболической траектории, для которой $p = 0$, это уравнение упрощается до

$$r = \sqrt[3]{\frac{9\mathrm{G}Mt^2}{2}}\,.$$

Получив уравнения зависимостей $r(t)$ и $t(r)$, мы имеем всё необходимое для решения задачи, и можем приступить к вычислениям.

1. Вертикальный запуск

Снаряд запускается с поверхности Земли, и с этого момента начинается отсчёт высоты h и времени t_h. По полученной же выше формуле расстояния $r(t)$, имеем $r(0) = 0$, т.е. отсчёт времени t начинается в центре тяготения, перигее траектории. Следовательно, для вычисления высоты по данной формуле, следует учесть длину R и время t_R фиктивной части траектории, от центра Земли до её поверхности.

Время движения от перигея траектории в центре Земли до высоты h над её поверхностью равно $t = t_R + t_h$, где по полученной выше формуле времени

$$t_R = \frac{R}{3}\sqrt{\frac{2R}{\mathrm{G}M}}\,,$$

тогда расстояние от центра Земли до высоты h равно:

$$r = \sqrt[3]{\frac{9\mathrm{G}M\,(t_R + t_h)^2}{2}} = \sqrt[3]{\frac{\left(R\sqrt{2R} + 3\sqrt{\mathrm{G}M}\,t_h\right)^2}{2}}\,,$$

и для высоты над поверхностью Земли, $h = r - R$, получаем формулу:

$$h = \sqrt[3]{\frac{\left(R\sqrt{2R} + 3\sqrt{\mathrm{G}M}\,t_h\right)^2}{2}} - R\,.$$

Подставив в полученную формулу числовые значения входящих параметров:

G = 6,67384e-11 м³/с²/кг,

M = 5,9726e24 кг,

R = 6371000 м,

t_h = 60 с,

получаем для высоты, которую снаряд достигнет через минуту полёта, значение:

h = 654,631 км.

2. Горизонтальный запуск

При горизонтальном запуске снаряда, точка запуска является ближайшей к центру тяготения точкой орбиты – перигеем орбиты, $p = R$. Подставляя это значение перигея в полученное нами уравнение зависимости расстояния от времени, получаем для высоты подъёма $h = r - R$ формулу:

$$h = \frac{1}{2}\left(y - \frac{2R}{y}\right)^2, \text{ где } y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 + 8R^3}} \text{ и } x = 3\sqrt{\mathrm{G}M}\,t\,.$$

Подставив числовые значения входящих параметров, получим для высоты, которую снаряд достигнет через минуту полёта при горизонтальном запуске, значение:

$$h = 17{,}644 \text{ км},$$

значительно меньше, чем при вертикальном запуске.

3. Сравнение вариантов запуска

1. Разность высот, достигаемых снарядом при вертикальном и горизонтальном запуске за одно и то же время, в общем виде запишется как

$$\Delta h = \sqrt[3]{\frac{\left(R\sqrt{2R} + x\right)^2}{2}} - R - \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 + 8R^3}} - \frac{2R}{\sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 + 8R^3}}}\right)^2, \text{ где } x = 3\sqrt{\mathrm{G}M}\,t\,.$$

Через минуту, час и сутки полёта, разность высот станет, соответственно, равной:

$$\Delta h(60) = 636{,}987 \text{ км},$$

$$\Delta h(3600) = 6723{,}198 \text{ км},$$

$$\Delta h(86400) = 6892{,}207 \text{ км}.$$

2. Предел, к которому разность высот стремится при неограниченном росте времени, равен:

$$\lim_{t\to\infty} \Delta h(t) = \lim_{x\to\infty} \Delta h(x) = R = 6371 \text{ км}.$$

Сопоставив это с предыдущими значениями, мы видим, что разность высот не растёт постоянно, но достигнув некоторого максимума, затем убывает до значения равного радиусу Земли.

3. Найдём максимум функции $\Delta h(t)$. Приравняв производную функции к нулю,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta h(t) = 0\,,$$

и найдя корень уравнения, получаем для времени максимума значение:

$$t_{\max} = 14888{,}698 \text{ с} = 4 \text{ ч } 8 \text{ мин } 8{,}698 \text{ с},$$

и соответствующее ему значение максимума разности высот:

$$\Delta h_{\max} = \Delta h(14888{,}698) = 7032{,}331 \text{ км}.$$

Итак, мы видим, что разность высот, достигаемых баллистическим снарядом при вертикальном и горизонтальном запуске за одно и то же время, довольно быстро (4 с небольшим часа) достигает своего максимума, 7032 км, и затем бесконечно долго убывает до значения равного радиусу Земли, 6371 км, – остаётся почти неизменной.

Построим для наглядности графики траекторий, а также высот и скоростей как функций времени, $h(t)$ и $v(t)$, для обоих вариантов запуска снаряда.

Для траекторий при вертикальном и горизонтальном запуске, соответственно, имеем, в полярной системе координат, следующие уравнения:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad r = \frac{2p}{1+\sin\varphi}.$$

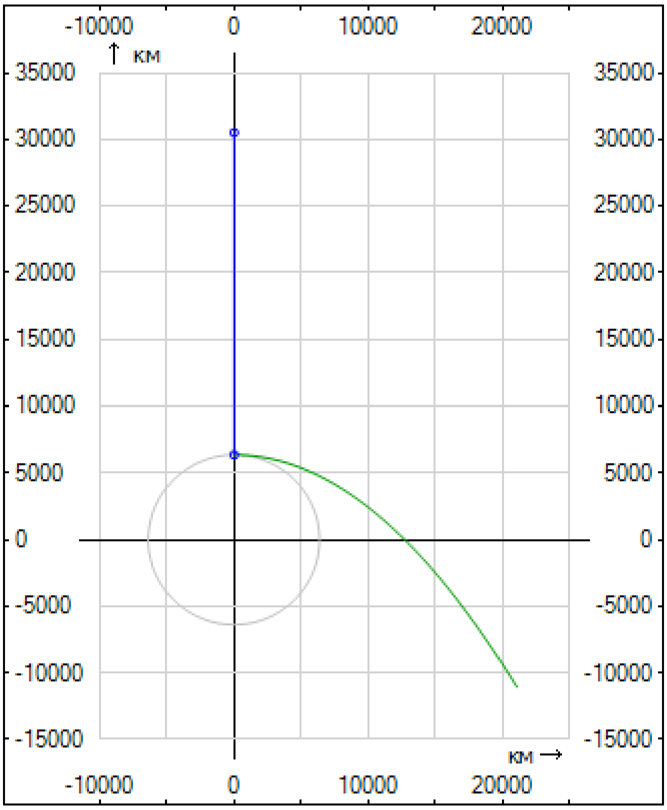


Рис. 3. Траектории, час полёта.

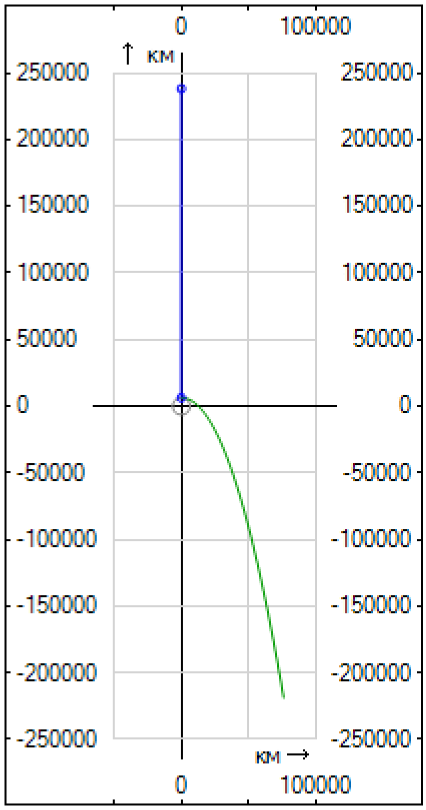


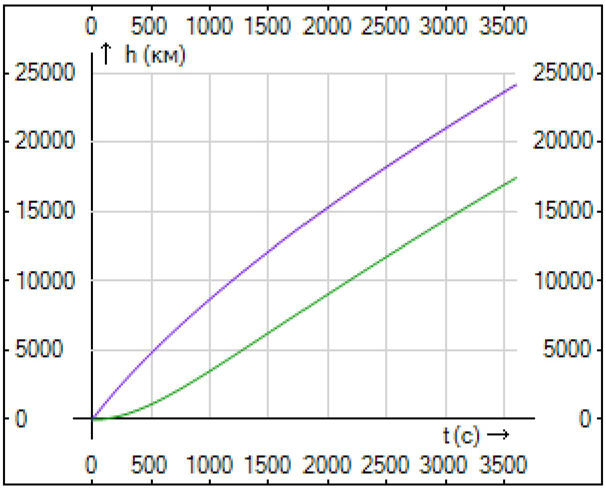
Рис. 4. Траектории, сутки полёта.

Для построения графиков зависимостей $h(t)$ и $v(t)$ преобразуем уравнения к виду, удовлетворяющему требованиям сервиса онлайн построения графиков yotx.ru.

Подставив числовые значения входящих параметров, после преобразования получим для высоты полёта следующие уравнения (заменив символ t на x):

h_1 = 79370,053/10000*(22741,882 + 59,895*x)^(2/3) - 6371, (км),

h_2 = 5*((59,895*x + sqrt(3587,416*x^2 + 206877,28*10000))^(1/3) - 1274,2/((59,895*x + sqrt(3587,416*x^2 + 206877,28*10000))^(1/3)))^2, (км).



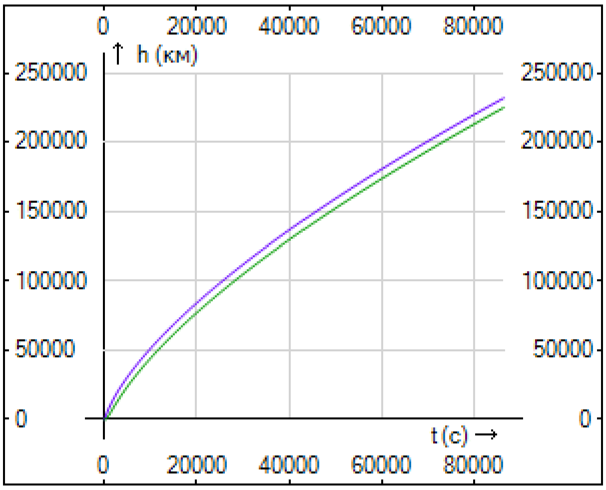


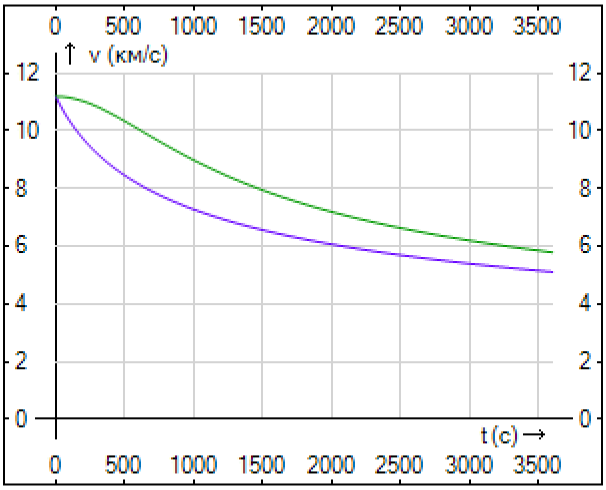
Рис. 5. Высота, час полёта.

Рис. 6. Высота, сутки полёта.

Подставив в уравнение параболической скорости, $v = \sqrt{2GM/r}$, выражения $r(t)$, аналогично получим для скорости полёта следующие уравнения:

v_1 = 31692,484/100/((22741,882 + 59,895*x)^(1/3)), (км/с),

v_2 = 28234,793/100/sqrt(637,1 + 0,5*
((59,895*x + sqrt(3587,416*x^2 + 206877,28*10000))^(1/3) - 1274,2/
((59,895*x + sqrt(3587,416*x^2 + 206877,28*10000))^(1/3)))^2), (км/с).



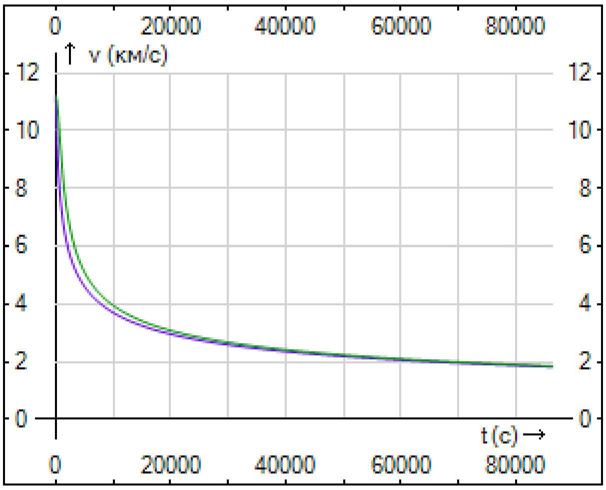


Рис. 7. Скорость, час полёта.

Рис. 8. Скорость, сутки полёта.

Пример 9. Задача двух тел

> Тела массой 1 и 2 кг обращаются вокруг их общего центра масс так, что минимальное расстояние между ними равно 1 м, а максимальное – 2 м.
>
> Найти период обращения тел, угловые и линейные скорости тел, как в относительной системе отсчета, так и в системе центра масс, и построить траектории движения тел в обеих системах отсчёта.

В данном случае массы тел сопоставимы по величине, и задача, вообще говоря, не является задачей о движении в центральном поле тяготения, но сводится к ней [6].

1. Период обращения

В относительной системе отсчёта, связанной с одним из тел, другое тело обращается вокруг первого так, как будто оно движется в центральном поле тела суммарной массы:

$$M = m_1 + m_2 \,.$$

Период обращения не зависит от системы отсчёта, и в обеих системах отсчёта равен:

$$T = \pi\sqrt{\frac{(a+p)^3}{2\mathrm{G}M}} = \pi\sqrt{\frac{(2+1)^3}{2\mathrm{G}(1+2)}} = 815770{,}947 \text{ с} = 9{,}442 \text{ дней.}$$

2. Угловая скорость тел

Угловая скорость периферийного тела в относительной системе отсчёта равна:

$$\omega = \frac{L}{r^2} = \frac{\sqrt{f\mathrm{G}M}}{r^2} = \frac{2\sqrt{\mathrm{G}}}{r^2}\,.$$

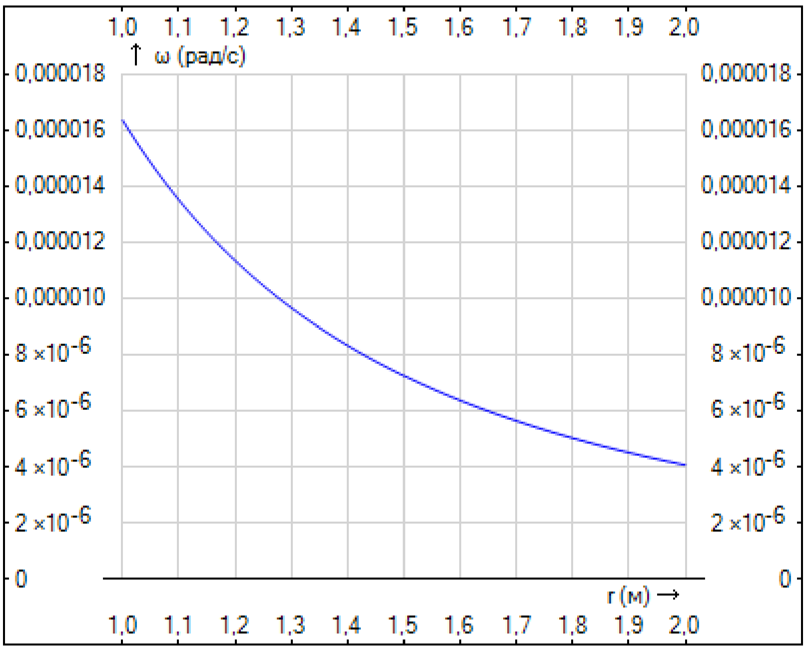


Рис. 9. Угловая скорость тела как функция расстояния в интервале [p, a].

Угловая скорость изменяется от максимальной в перицентре траектории до минимальной в апоцентре траектории:

$$\omega_{\max} = \omega(p) = 2\sqrt{\mathrm{G}} = 16{,}339 \cdot 10^{-6} \text{ рад/с},$$

$$\omega_{\min} = \omega(a) = \frac{\sqrt{\mathrm{G}}}{2} = 4{,}085 \cdot 10^{-6} \text{ рад/с}.$$

В системе центра масс угловая скорость обоих тел одинакова, и та же, что у периферийного тела в относительной системе отсчёта. Имеются в виду угловые скорости в один и тот же момент времени, или при одном и том же, угловом, положении на орбите. Но поскольку расстояния от центра в названных случаях разные, то уравнения угловой скорости как функции расстояния будут в них разными. Сделав в уравнении угловой скорости в относительной системе отсчёта замены

$$r = \frac{m_1 + m_2}{m_2} r_1 \quad \text{и} \quad r = \frac{m_1 + m_2}{m_1} r_2,$$

получим уравнения угловой скорости как функции расстояния в системе центра масс:

$$\omega_1 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \frac{\sqrt{f\mathrm{G}M}}{r_1^2} = \frac{8\sqrt{\mathrm{G}}}{9r_1^2}, \quad \omega_2 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \frac{\sqrt{f\mathrm{G}M}}{r_2^2} = \frac{2\sqrt{\mathrm{G}}}{9r_2^2}.$$

Сделав же замену

$$r = \frac{f}{1 + e\cos\varphi},$$

мы получим уравнение угловой скорости как функцию полярного угла φ, общее для всех трёх случаев – периферийного тела в относительной системе отсчёта, и обоих тел в системе центра масс:

$$\omega = \frac{(1 + e\cos\varphi)^2 \sqrt{f\mathrm{G}M}}{f^2} = \frac{(3 + \cos\varphi)^2 \sqrt{\mathrm{G}}}{8}.$$

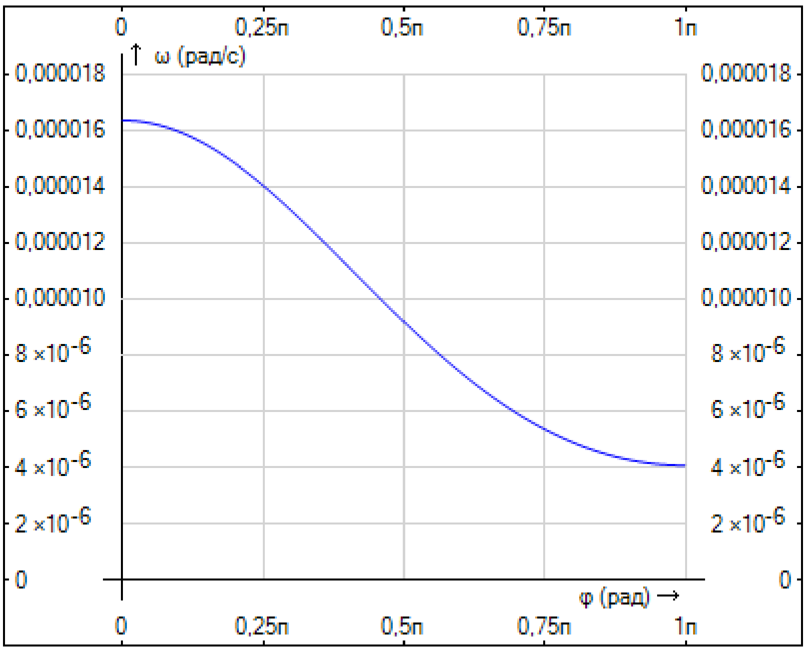


Рис. 10. Угловая скорость тел как функция полярного угла φ в интервале [0, π].

3. Скорости тел

Расстояния тел от центра в системе центра масс связаны с расстоянием между телами, или расстоянием от центра в относительной системе отсчёта, соотношениями:

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r, \qquad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r,$$

Вследствие этого орбиты тел в системе центра масс подобны орбите тела в относительной системе отсчёта, и отличаются только масштабом.
Поэтому параметры орбиты, имеющие размерность длины, в одной системе отсчёта, могут быть получены из параметров орбиты в другой системе отсчёта с помощью масштабного коэффициента, как в равенствах выше. В частности, это касается апоцентра, перицентра и фокального параметра орбиты, но также справедливо и для скорости тела, так как скорость это расстояние, проходимое в единицу времени.

3.1. Скорость тела в относительной системе отсчёта

Скорость периферийного тела относительно центрального равна:

$$v = \sqrt{2\mathrm{G}M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a+p}\right)} = \sqrt{2\mathrm{G}(1+2)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2+1}\right)} = \sqrt{6\mathrm{G}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{3}\right)}.$$

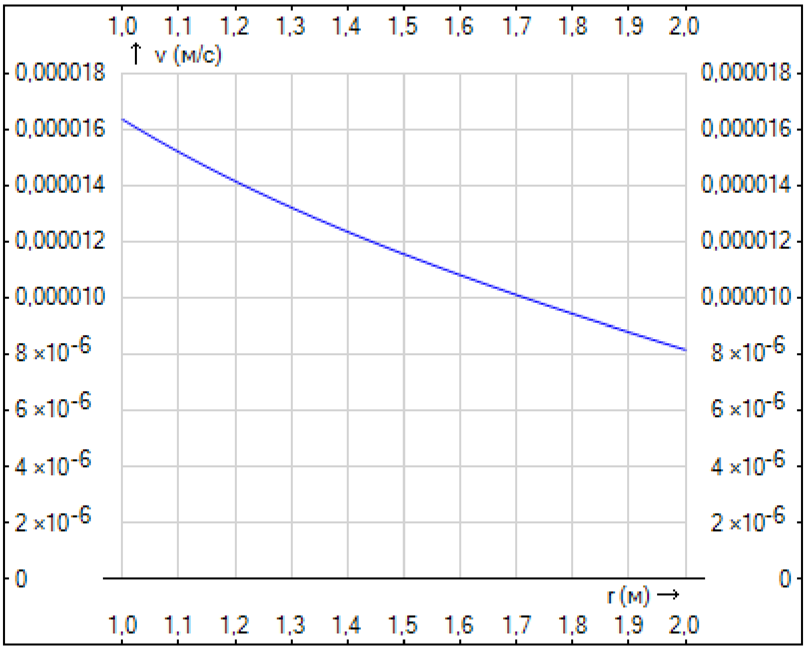


Рис. 11. Скорость тела в относительной системе отсчёта в интервале [p, a].

Скорость изменяется от максимальной в перицентре траектории до минимальной в апоцентре траектории:

$$v_{\max} = v(p) = 2\sqrt{\mathrm{G}} = 16{,}339 \cdot 10^{-6} \text{ м/с},$$

$$v_{\min} = v(a) = \sqrt{\mathrm{G}} = 8{,}169 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}.$$

3.2. Скорости тел в системе центра масс

В системе центра масс каждое из тел движется так, как будто оно движется в центральном поле расположенного в центре масс тела, равносильного другому телу [6], тело m_1 – в поле массы M_2, тело m_2 – в поле массы M_1, где

$$M_1 = \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2}, \qquad M_2 = \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Большие оси орбит равны:

$$a_1 + p_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(a + p), \qquad a_2 + p_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(a + p).$$

Отсюда, уравнения скорости тел в системе центра масс будут такими:

$$v_1 = \sqrt{2\mathrm{G}M_2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{a_1 + p_1}\right)} = \frac{4}{3}\sqrt{\mathrm{G}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2}\right)},$$

$$v_2 = \sqrt{2\mathrm{G}M_1\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{a_2 + p_2}\right)} = \frac{1}{3}\sqrt{2\mathrm{G}\left(\frac{1}{r_2} - 1\right)}.$$

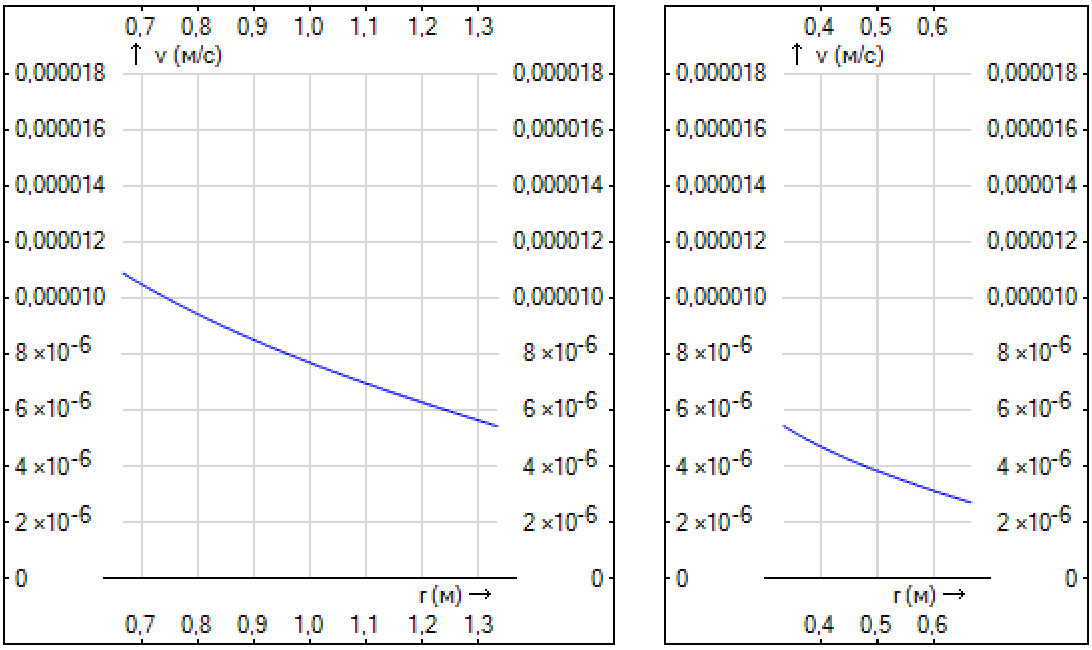


Рис. 12 и 13. Скорости первого и второго тела в системе центра масс, в интервалах [p_1, a_1] и [p_2, a_2], соответственно.

Расстояния перицентра и апоцентра орбит здесь равны:

$$p_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p = \frac{2}{3} \text{ м}, \qquad a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a = \frac{4}{3} \text{ м};$$

$$p_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} p = \frac{1}{3} \text{ м}, \qquad a_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a = \frac{2}{3} \text{ м}.$$

Для максимальных и минимальных скоростей тел в системе центра масс имеем:

$$v_{1\,\max} = v_1(p_1) = \frac{4}{3}\sqrt{\mathrm{G}} = 10{,}892\cdot 10^{-6}\ \text{м/с},$$

$$v_{1\,\min} = v_1(a_1) = \frac{2}{3}\sqrt{\mathrm{G}} = 5{,}446\cdot 10^{-6}\ \text{м/с},$$

$$v_{2\,\max} = v_2(p_2) = \frac{2}{3}\sqrt{\mathrm{G}} = 5{,}446\cdot 10^{-6}\ \text{м/с},$$

$$v_{2\,\min} = v_2(a_2) = \frac{1}{3}\sqrt{\mathrm{G}} = 2{,}723\cdot 10^{-6}\ \text{м/с}.$$

3.3. Скорости тел как функции полярного угла

Сделав в уравнении скорости в относительной системе отсчёта замену

$$r = \frac{f}{1 + e\cos\varphi},$$

получим следующее уравнение скорости периферийного тела в относительной системе отсчёта как функцию полярного угла φ:

$$v = \sqrt{2\mathrm{G}M\left(\frac{1 + e\cos\varphi}{f} - \frac{1}{a+p}\right)} = \frac{\sqrt{2\mathrm{G}(5 + 3\cos\varphi)}}{2}.$$

В системе центра масс получим уравнения:

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}v = \frac{\sqrt{2\mathrm{G}(5 + 3\cos\varphi)}}{3}, \qquad v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v = \frac{\sqrt{2\mathrm{G}(5 + 3\cos\varphi)}}{6}.$$

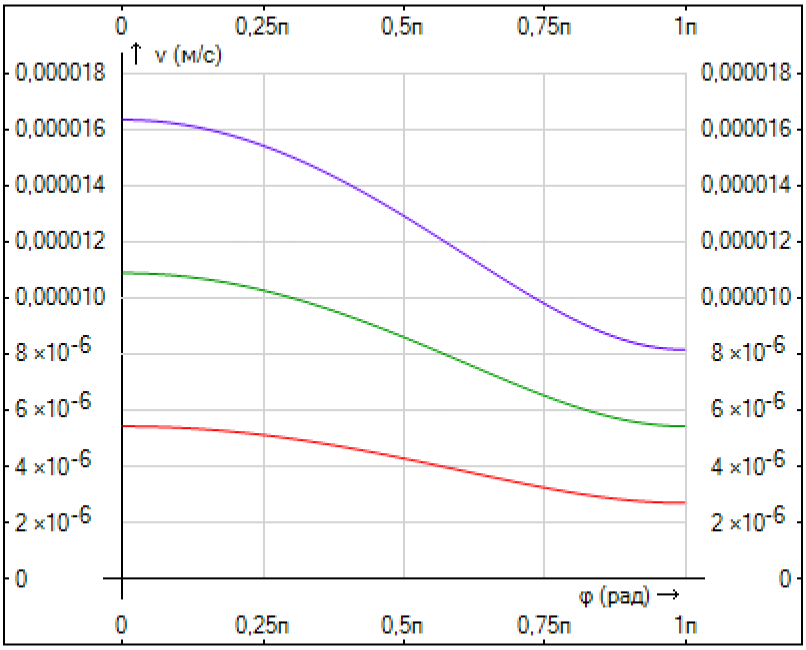


Рис. 14. Скорости тел как функции полярного угла, в относительной системе отсчёта (синяя линия) и в системе центра масс (зелёная и красная линии).

4. Траектории тел

4.1. Траектория тела в относительной системе отсчёта

Траектория движения тела в центральном поле тяготения в полярной системе координат (r, φ) даётся уравнением:

$$r = \frac{f}{1 + e\cos\varphi}.$$

В нашем случае

$$e = \frac{a-p}{a+p} = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad f = \frac{2ap}{a+p} = \frac{4}{3},$$

и уравнение траектории тела, после упрощения, будет таким:

$$r = \frac{4}{3 + \cos\varphi}.$$

4.2. Траектории тел в системе центра масс

Применив к уравнению траектории в относительной системе отсчёта равенства

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \quad \text{и} \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r$$

получим уравнения траектории в системе центра масс, корректные для каждого из тел по отдельности. Однако учитывая, что тела движутся совместно в противофазе, со сдвигом на 180°, начальный угол в одном из уравнений, например, втором, следует сдвинуть на 180°. В итоге получим для траекторий тел следующие уравнения:

$$r_1 = \frac{8}{9 + 3\cos\varphi}, \qquad r_2 = \frac{4}{9 + 3\cos(\varphi + \pi)}.$$

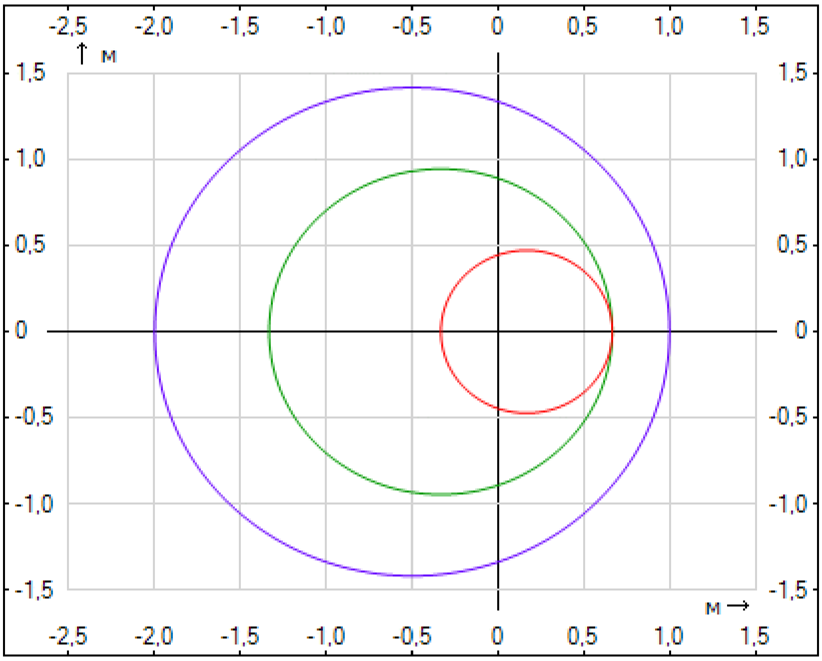


Рис. 15. Траектории тел, в относительной системе отсчёта (синяя линия) и в системе центра масс (зелёная и красная линии).

Пример 10. Ещё одна задача двух тел

В 2015 году нтернет-журнал «Науковедение» опубликовал статью под названием «Метод решения задачи двух тел». Авторы статьи утверждают в ней, что «общая задача двух тел не решена до сих пор, а решена только частная задача двух тел (задача Кеплера), т.е. движение планеты вокруг неподвижного Солнца и тому подобное», и попытались предложить свой метод решения задачи двух тел. Попытка получилась неудачной. Как само утверждение, так и предложенный авторами метод, неверны.

Свой метод авторы продемонстрировали на следующем примере:

> «Рассмотрим две материальные точки m_1 и m_2. Массы которых примем $m_1 = 1{,}0\cdot10^{21}$ кг и $m_2 = 0{,}5\cdot10^{21}$. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2. Расстояние между точками $r = 3{,}0\cdot10^9$ м. Величины начальных скоростей $v_1 = 1$ м/с и $v_2 = 2$ м/с. Векторы скоростей антипаралельны и расположены в плоскости *xy*».

Заметим, что условие задачи не является ни необходимым, ни достаточным для существования (единственного) решения. Из четырёх параметров: масс и скоростей обоих тел, достаточно задать три, поскольку скорости тел в системе центра масс обратно пропорциональны массам тел. С другой стороны, недостаточно задать расстояние между телами, нужно, конечно, знать и положение тел на орбите в этот момент. Но положение не определено.

Применяя свой метод, авторы получили в системе центра масс такие орбиты:

$$r_1 = \frac{0{,}15\cdot10^8}{1-0{,}985\cos\varphi}, \qquad r_2 = \frac{1{,}79\cdot10^8}{1-0{,}641\cos\varphi}.$$

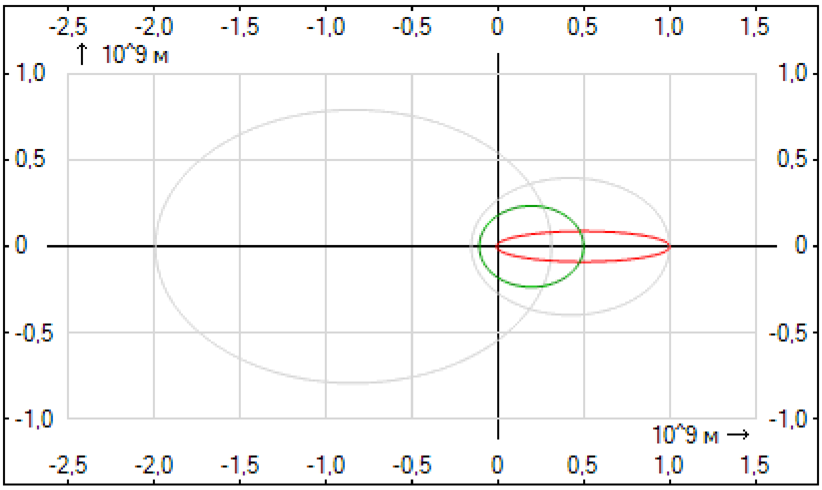


Рис. 16. Траектории тел в системе центра масс по «методу».

Очевидно, что это решение неверно. Эксцентриситеты орбит должны быть одинаковыми. Странно также, что авторы не заметили, что при движении по таким орбитам, тела никогда не окажутся на заданном в условии задачи расстоянии $3{,}0\cdot10^9$ метров друг от друга.

Правильное решение

1. Вследствие равенства

$$r = r_1 + r_2,$$

расстояния в относительной системе отсчёта равны сумме аналогичных расстояний в системе центра масс. Это справедливо для параметров имеющих размерность длины, таких как апоцентр, перицентр и фокальный параметр орбиты, но верно также и для скорости тел, как расстояния в единицу времени.

Отсюда, скорость тела в относительной системе отсчёта, в момент нахождения тел на заданном расстоянии $r = 3{,}0 \cdot 10^9$ м, равна:

$$v = v_1 + v_2 = 3 \text{ м/с}.$$

Масса условного центра тяготения в относительной системе отсчёта равна:

$$M = m_1 + m_2 = 1{,}5 \cdot 10^{21} \text{ кг}.$$

Подставив эти значения в уравнение орбитальной скорости,

$$v = \sqrt{2\mathrm{G}M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a+p}\right)},$$

получим уравнение, в котором неизвестен один параметр, $a + p$, большая ось орбиты. Решив уравнение, получим для большой оси орбиты в относительной системе отсчёта значение:

$$a + p = 3{,}468 \cdot 10^9 \text{ м}.$$

2. На этом однозначность решения заканчивается. Далее решение становится неоднозначным, поскольку либо апоцентр, либо перицентр, может быть задан, из определённого интервала, произвольно. В частности, апоцентр может принять любое значение из интервала $3{,}0 \cdot 10^9 - 3{,}468 \cdot 10^9$ м.

Положив, например, апоцентр равным

$$a = 3{,}0 \cdot 10^9 \text{ м},$$

для перицентра получим значение

$$p = 4{,}68 \cdot 10^8 \text{ м}.$$

Откуда получим

$$e = \frac{a-p}{a+p} = 0{,}730 \quad \text{и} \quad f = \frac{2ap}{a+p} = 8{,}091 \cdot 10^8 \text{ м},$$

и следующее уравнение траектории в относительной системе отсчёта:

$$r = \frac{8{,}091 \cdot 10^8}{1 + 0{,}73\cos\varphi}.$$

Используя соотношения

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r, \qquad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r,$$

и сдвинув фазу в первом уравнении на 180°, в системе центра масс получим уравнения:

$$r_1 = \frac{2{,}697 \cdot 10^8}{1 + 0{,}73\cos(\varphi + \pi)}, \qquad r_2 = \frac{5{,}394 \cdot 10^8}{1 + 0{,}73\cos\varphi}.$$

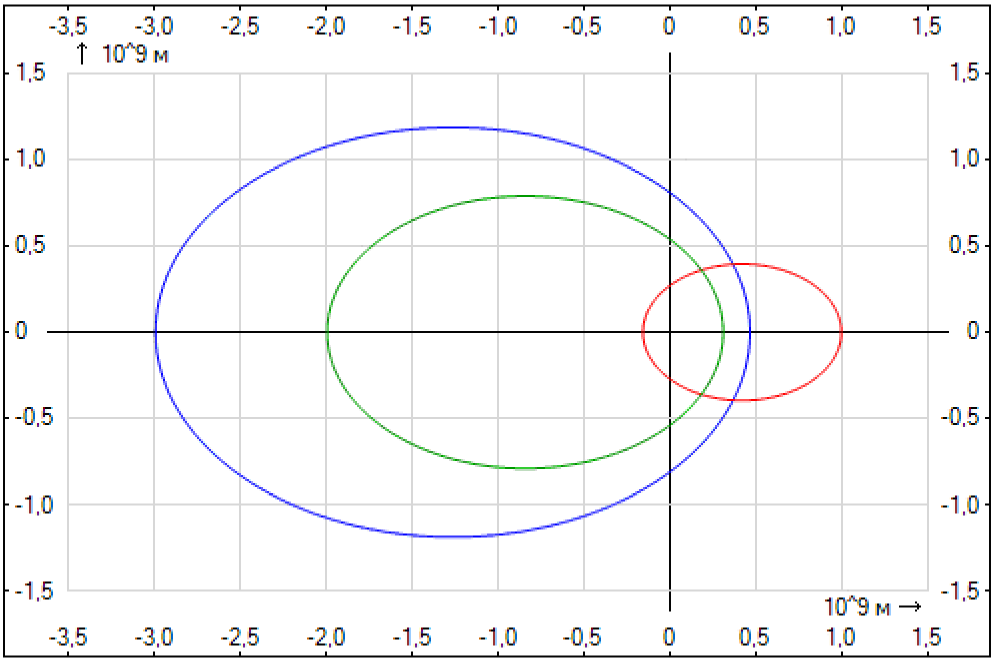


Рис. 17. Траектории тел в обеих системах отсчёта при $a = 3{,}0 \cdot 10^9$ м.

На рисунке синим цветом показана траектория тела в относительной системе отсчёта, а красным и зелёным – траектории первого и второго тела, соответственно, в системе центра масс.

Положив значение апоцентра равным $3{,}3 \cdot 10^9$ м, получим другое решение:

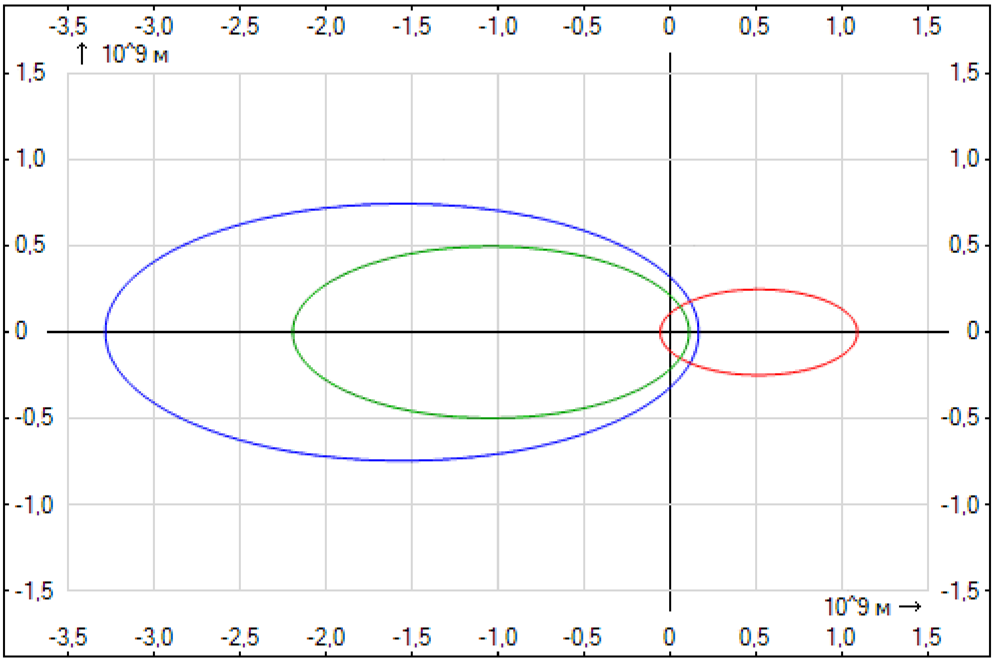


Рис. 18. Траектории при $a = 3{,}3 \cdot 10^9$ м.

2. Модифицированная динамика

> «OJ 287 представляет собой двойную систему чёрных дыр, бóльшая из которых имеет массу равную 18 миллиардам масс Солнца, фактически массу небольшой галактики. Меньший компаньон весит как 100 миллионов масс Солнца. Период его обращения составляет 12 лет».
> Этот объект интересен своим огромным смещением перицентра орбит, который составляет около 39 градусов за один период обращения. Такое смещение, в отличие от смещения перигелия Меркурия, можно показать графически.

Массы тел системы сравнимы по величине, поэтому мы имеем здесь задачу двух тел, сводящуюся к задаче движения в центральном поле. Решим её в относительной системе отсчёта, связанной с одним из тел. Составим систему уравнений:

$$\left\{T = \pi\sqrt{\frac{(a+p)^3}{2GM}},\ \Delta\varphi = 2\pi\left(\sqrt{1+\frac{6GM}{c^2 f}}-1\right)\right\},\ \text{где}\ M = m_1 + m_2\ \text{и}\ f = \frac{2ap}{a+p}.$$

Подставляя численные данные и решая систему относительно a и p, получим следующие параметры орбиты одного компаньона относительно другого:

$$a = 3{,}730\cdot 10^{15},\ p = 3{,}876\cdot 10^{14},\qquad f = 7{,}022\cdot 10^{14},\ e = 0{,}812,\ i = 0{,}902.$$

Построив график уравнения

$$r = \frac{7{,}022\cdot 10^{14}}{1-0{,}812\sin(0{,}902\varphi)}$$

в интервале $[0, 22\pi]$, получим такую траекторию:

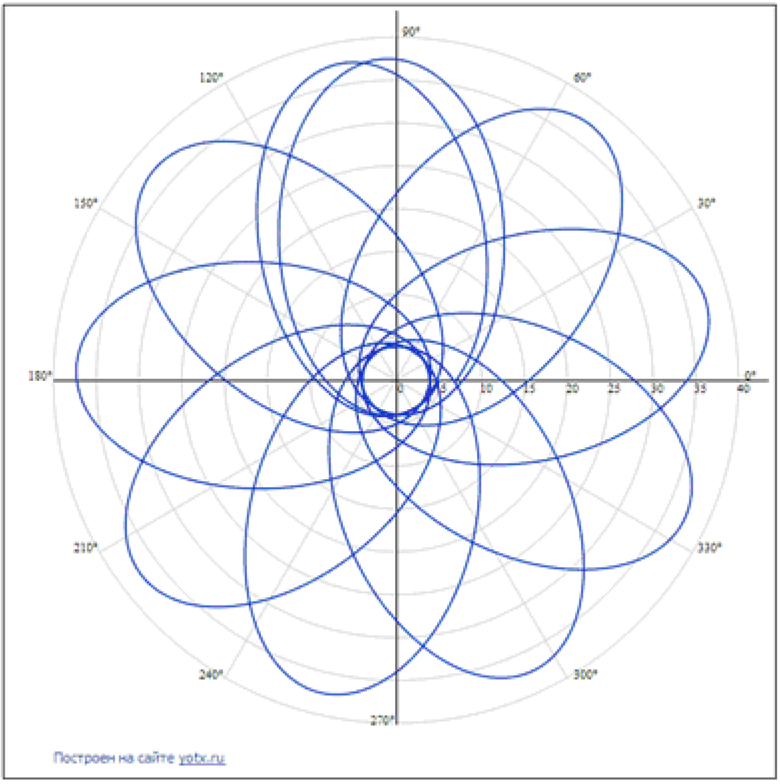


Рис. 19. Орбита спутника чёрной дыры OJ 287.
Смещение составляет 39° за (двенадцатилетний) период.

Заключение

Получены ранее неизвестные общие кинематические уравнения движения в центральном поле тяготения, обобщающие законы Кеплера, из которых, простой подстановкой выражений остаточной скорости и момента скорости, получаются классические динамические уравнения движения в центральном поле тяготения. Классическая теория тяготения упрощается. Как и должно быть.

Ссылки

1. Г. Б. Двайт. Таблицы интегралов. Издание второе, исправленное. М.: Наука, 1966.
2. Исаак Ньютон. Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989. О движении тел по подвижным орбитам и о перемещении апсид. Предложение XLIV Теорема XIV.
3. Н. Т. Роузвер. Перигелий Меркурия. От Леверье до Эйнштейна. М.: Мир, 1985.
4. Амелькин Н. И. О прецессии орбиты Меркурия. Доклады академии наук, 2019, том 489, № 6, с. 570–575.
5. Бутиков Е. И. Закономерности кеплеровых движений. 2006.
6. Браун В. Г. Близкодействие и задача двух тел. 2020.